Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

2. Übungsblatt, März 2011

1. Die Eulersche Zahl e kann mittels der Formel
$$e = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$$
approximiert werden. Allerdings kann der Rechner den Wert $1+1/n$ nicht exakt darstellen, sondern rechnet mit
$$1(!+)\frac{1}{n} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)(1+\varepsilon)$$
wobei ε kleiner als die Maschinengenauigkeit **eps** ist. Nehmen Sie nun der Einfachheit halber an, dass mit Ausnahme der Addition $1+1/n$ alle vorkommenden Operationen exakt ausgeführt werden. Dann setzt sich der gesamte Fehler, der bei der numerischen Approximation von e durch $\big(1+1/n\big)^n$ gemacht wird, aus dem Approximationsfehler
$$\Delta_{\text{app}}(n) := \Big|e - \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big|$$
und dem numerischen Fehler
$$\Delta_{\text{num}}(n) := \Big|\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n - \Big(1(!+)\frac{1}{n}\Big)^n\Big|$$
zusammen. Schätzen Sie nun unter der Annahme $\mathbf{eps} \simeq 10^{-16}$ ab, wie groß n sein muss, damit der Gesamtfehler minimal wird. Zeigen Sie dazu die Abschätzung
$$\Delta_{\text{app}}(n) \ge \frac{1}{2n}\,.$$
Von welcher Größenordnung ist in diesem Fall der Gesamtfehler?

2. Berechnen Sie die Kondition der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Für $b \in \mathbb{R}^2$ seien $x \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems $Ax = b$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung des gestörten Systems $A\tilde{x} = \tilde{b}$, wobei $\tilde{b} = b + \Delta b$ eine gestörte rechte Seite ist. Wie kann man mit Hilfe der Kondition von A den relativen Fehler
$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$
abschätzen ohne dabei das System explizit zu lösen. Vergleichen Sie diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Wert des relativen Fehlers für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\Delta b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Sei $A = \lambda U \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{cond}_2(A) = 1$.

4. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ die durch $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Vektoren x, Δx, b, $\Delta b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existieren mit

$$Ax = b, \qquad\qquad A(x+\Delta x) = b + \Delta b$$

und

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \operatorname{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\,,$$

wobei $\operatorname{cond}(A)$ die Kondition von A bezüglich $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ bezeichnet.

5. In Matlab kann das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit dem Befehl `x = A\b` gelöst werden. Wir setzen $A = M^{20} \in \mathbb{R}^{200\times 200}$ mit

$$M = \big(m_{ij}\big)\,, \quad m_{ij} := \begin{cases} -2\,, & i = j+1 \text{ oder } j = i+1, \\ 5\,, & i = j, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

und setzen $b = \big(b_i\big)_{i=1}^{200}$ mit $b_i = 1$.

Lösen Sie das Gleichungssystem und prüfen Sie das Ergebnis. Was fällt Ihnen auf? Wie groß ist die Kondition von A?

Hinweis: Mit den Matlab-Befehlen `diag` beziehungsweise `spdiags` können Sie die Matrix A sehr einfach erzeugen. Weiters können Sie mit `cond` die Kondition der Matrix bestimmen.

6. Die Funktion $x \mapsto \log(1+x)$ besitzt für $|x| < 1$ die Reihenentwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{mit } a_k := (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\,.$$

Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das mittels dieser Entwicklung den Logarithmus approximiert, wobei die Summation abgebrochen wird, sobald der Wert $|a_k|$ kleiner ist als eine vorgegebene Toleranz **tol**. Was passiert für $x \to \pm 1$?