Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

12. Übungsblatt, Juni 2011

Erinnerung / Vorwegnahme: Das explizite Eulerverfahren ist definiert durch die Iterationsvorschrift

$$y_{i+1} = y_i + hF(t_i, y_i)\,,$$

das implizite Eulerverfahren durch

$$y_{i+1} = y_i + hF(t_{i+1}, y_{i+1})\,,$$

das Verfahren von Runge durch

$$\eta_i = y_i + \frac{h}{2}F(t_i, y_i)\,, \qquad y_{i+1} = y_i + hF(t_i + h/2, \eta_i)\,,$$

und das Verfahren von Heun durch

$$\eta_i = y_i + hF(t_i, y_i)\,, \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}F(t_i, y_i) + \frac{h}{2}F(t_{i+1}, \eta_i)\,.$$

1. Das nicht-autonome System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

   $$y'(t) = F\big(t, y(t)\big)\,, \qquad y(0) = y_0\,,$$

   mit $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ läßt sich in ein äquivalentes $(d+1)$-dimensionales autonomes System

   $$z'(t) = G\big(z(t)\big)\,, \qquad z(0) = z_0\,,$$

   umschreiben, indem man mit der Zerlegung $z = (z^{(0)}, \hat{z})$ mit $\hat{z} \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $G\colon \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ definiert als $G(z) := \big(1, F(z^{(0)}, \hat{z})\big)$ und den Anfangswert als $z_0 := (0, y_0)$. Sind nun y und z Lösungen dieser Differentialgleichungen, so gilt $z^{(0)}(t) = t$ und $\hat{z}(t) = y(t)$.

   Zeigen Sie, dass dieselbe Äquivalenz auch für die numerische Approximation über das explizite bzw. implizite Eulerverfahren, sowie das Verfahren von Runge gilt.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine diagonalisierbare Matrix mit reellen Eigenwerten $\lambda_i < 0$. Dann gilt für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^d$, dass die Lösung der linearen Differentialgleichung

   $$y'(t) = Ay(t)\,, \qquad y(0) = y_0$$

   für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Betrachten Sie nun die Approximation der Lösung dieser Differentialgleichung mittels des expliziten Eulerverfahrens, des impliziten Eulerverfahrens und des Verfahrens von Runge. Für welche Schrittweiten $h > 0$ konvergieren die so erhaltenen Approximationen ebenfalls gegen 0?

3. Führen Sie jeweils vier Schritte mit Schrittweite $h = \pi/4$ des expliziten Eulerverfahrens, des Verfahrens von Runge und des Verfahrens von Heun zur Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t)\,, \qquad & y_1(0) &= 0\,, \\ y_2'(t) &= -y_1(t)\,, \qquad & y_2(0) &= 1\,, \end{aligned} \tag{1}$$

durch.

4. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die schwache (einseitige) Lipschitz-Bedingung

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big) \cdot (y - z) \le l|y - z|^2$$

für ein $l \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das implizite Eulerverfahren

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(t_{i+1}, y_{i+1}) \tag{2}$$

wohldefiniert ist, also die Lösung von (2) existiert und eindeutig ist, sofern die Schrittweite $h > 0$ die Bedingung $hl < 1$ erfüllt.

5. Implementieren Sie in Matlab das explizite Eulerverfahren, das Verfahren von Runge und das Verfahren von Heun zur Lösung von (Systemen von) gewöhnlichen Differentialgleichungen. Lösen Sie das System (1) für verschiedene Schrittweiten und vergleichen Sie die Ergebnisse zum Zeitpunkt $T = 2\pi$.

6. Implementieren Sie in Matlab das implizite Eulerverfahren zur Lösung von Systemen von *linearen* gewöhnlichen Differentialgleichungen.

   Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Tridiagonalmatrix gegeben durch die Hauptdiagonale $d = (-2, \dots, -2) \in \mathbb{R}^n$ und die Nebendiagonalen $l = u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$, und betrachten Sie das System (eine Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung)

$$y\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n\,, \qquad y'(t) = (n+1)^2\,Ay(t)\,, \qquad y(0) = y_0\,,$$

   wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ der Vektor mit den Einträgen $y_0^{(k)} = \sin(2\pi k/(n+1))$ ist. Testen Sie Ihr Programm an diesem Beispiel für verschiedene Dimensionen $n \in \mathbb{N}$, Schrittweiten $h > 0$ und Endzeiten $T > 0$, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des expliziten Eulerverfahrens.