Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

11. Übungsblatt, Juni 2011

1. Bestimmen Sie durch Anwendung der Lagrange-Polynominterpolation das reelle Polynom p(x) vom Grad ≤ 3 mit den folgenden Eigenschaften:

$$p(-1) = 2,\ p(0) = 2,\ p(1) = 0,\ p(2) = 8$$

2. Es sei $f_m : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f_m(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\,,$$

ein trigonometrisches Polynom vom Grad m. Zeigen Sie, dass f_m duch die zusammengesetzte Trapezregel exakt integriert wird, falls das Intervall $[0, 2\pi]$ dafür in $n \geq m + 1$ gleich große Teile unterteilt wird.

3. Die *Mittelpunktsregel* ist die Quadraturformel gegeben durch

$$I_M(f) = (b - a) f((a + b)/2)$$

Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der Mittelpunktsregel. Sei weiters $f \in C^2$. Zeigen sie

$$|I(f) - I_M(f)| \leq \frac{1}{24}(b - a)^3 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

4. Die *Simpsonregel* ist die Quadraturformel gegeben durch

$$I_S(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)\,.$$

Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der Simpsonregel.

5. Implementieren Sie in Matlab die (zusammengesetzte) Mittelpunktsregel, Trapezregel und Simpsonregel. Verwenden Sie Ihr Programm, um für verschieden feine Diskretisierungen Approximationen der Integrale

$$I_1 = \int_0^1 \exp(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad I_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

zu berechnen. Bestimmen Sie jeweils die Fehler und versuchen Sie aus diesen die Konvergenzordnungen der Verfahren zu schätzen.

6. Implementieren Sie die adaptive Simpsonregel wie im nächsten Absatz beschrieben. Die Funktion soll die folgende Signatur haben:

$$\texttt{adaptiveSimpson}(\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{fun}, \texttt{eps}).$$

Dabei sind $\texttt{a}, \texttt{b}$ die Integrationsgrenzen im aktuellen Teilintervall, `fun` ein Function handle und $\texttt{eps} = \frac{\texttt{tolerance}}{(\texttt{b}-\texttt{a})}$ die Steuerungsvariable für die gewünschte Genauigkeit. Das Verfahren soll gemäß folgender Bedingung abgebrochen werden:

$$|J_S^i(f) - I_S^i(f)| \leq 15(x_{i+1} - x_i)\texttt{eps}\ \forall \texttt{i} = \texttt{0}, \ldots, \texttt{n} - \texttt{1}.$$

Testen sie die Implementierung anhand von

$$\int_{1.001}^{10} \frac{x}{x^2 - 1}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \sqrt{x}\, dx.$$

Machen sie einen `plot` von $\frac{x}{x^2-1}$ auf dem Intervall $[1.001, 10]$ mit den Stützstellen, welche ihre Implementierung zum Integrieren verwendet hat. Was fällt ihnen auf?

Adaptive numerische Integration

Adaptive Quadraturformeln sind Verfahren mit Schrittweitenanpassung, so dass Integrale $I = \int_a^b f(x)dx$ bis auf einen vorgegebenen Fehler `eps` genau berechnet werden. Wir wollen in Abhängigkeit von der Schrittweite h den Fehler der numerischen Quadratur kontrollieren. Dazu soll der Algorithmus das Intervall $[a, b]$ nach einem vorgegebenen Schema unterteilen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Anhand der Abschätzung für den Quadraturfehler erhält man eine Schätzung, wie sich der Fehler bei Intervallhalbierung verhält. Diese Schätzung kann man benutzen, um den wirklichen Integrationsfehler zu schätzen, und daraus eine Schätzung für eine geeignete Schrittweite herleiten. Seien n Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ von $[a, b]$ der Längen $h_i = x_{i+1} - x_i$ gegeben. Die Simpsonformel im Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ ist

$$I_S^i(f) = \frac{h_i}{6}[f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h_i}{2}) + f(x_{i+1})]$$

und die zusammengesetzte Simpsonformel auf $[x_i + \frac{h_i}{2}, x_{i+1}]$ und $[x_i + \frac{h_i}{2}, x_{i+1}]$

$$J_S^i(f) = \frac{h_i}{12}[f(x_i) + 4f(x_j + \frac{h_i}{4}) + 2f(x_i + \frac{h_i}{2}) + 4f(x_i + \frac{3h_i}{4}) + f(x_{i+1})].$$

Die Werte $|J_S^i(f) - I_S^i(f)|$ sind nach der Intervallhalbierung und der numerischen Integration bekannt. Erfüllt nun h_i das Kriterium

$$|J_S^i(f) - I_S^i(f)| \leq 15(x_{i+1} - x_i)\texttt{eps}\ \forall \texttt{i} = \texttt{0}, \ldots, \texttt{n} - \texttt{1}, \tag{1}$$

dann ist die Genauigkeit $|J_S^i(f) - I(f)| \approx (b - a)\texttt{eps}$ ungefähr erreicht. Andernfalls muss man die Teilintervalle, auf denen die Abschätzung (1) nicht gilt, feiner unterteilen. Dadurch ergibt sich folgendes Verfahren:

- Sei $I = [a, b]$.
- Berchne I_S, J_S und überprüfe das Abbruchkriterium.
- Ist das Abbruchkriterium nicht erfüllt, berechne I_S, J_S in den Teilintervallen $[a, a+\frac{b-a}{2}]$ und $[a+\frac{b-a}{2}, b]$.
- Wiederhole die Prozedur bis jedes Teilintervall die Abbruchbedingung erfüllt.

Der eben beschriebene Algorithmus ist am einfachsten rekursiv zu implementieren. Das heißt, die Funktion $\texttt{adaptiveSimpson}(\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{fun}, \texttt{eps})$ ruft sich selbst mit den Integrationsgrenzen der Teilintervalle auf, zBsp:

$$\texttt{adaptiveSimpson}(\texttt{a}, \texttt{a} + \frac{\texttt{b} - \texttt{a}}{2}, \texttt{fun}, \texttt{eps})$$
$$\texttt{adaptiveSimpson}(\texttt{a} + \frac{\texttt{b} - \texttt{a}}{2}, \texttt{b}, \texttt{fun}, \texttt{eps})$$