# Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

10. Übungsblatt, Mai/Juni 2011

1. Sei $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die drei (äquivalenten) Gleichungen

$$x^n - a = 0\,, \qquad x^{n+1} - ax = 0\,, \qquad x^{n-1} - \frac{a}{x} = 0\,.$$

   Bestimmen Sie die Iterationsvorschriften für das Newtonverfahren zur Lösung dieser Gleichungen und berechnen Sie jeweils die ersten drei Iterationsschritte mit $a = 4$, $n = 4$ und $x_0 = 1$. Welches der Verfahren wird am schnellsten konvergieren?

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und $\hat{x}$ eine Nullstelle von $f$. Es gelte $f'(\hat{x}) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \quad \text{mit } g(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}$$

   lokal quadratisch gegen $\hat{x}$ konvergiert.

3. Berechnen Sie die ersten drei Iterationsschritte des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} -5x + 2\sin(x) + \cos(y) \\ 4\cos(x) + 2\sin(y) - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   mit Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

4. Die Inverse einer (invertierbaren) Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist die eindeutige Nullstelle der Funktion $F\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$,

$$F(X) = X^{-1} - A\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Iterationsvorschrift

$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$$

   genau das Newtonverfahren zur Lösung der Gleichung $F(X) = 0$ beschreibt.

   *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass das Differential von $F$ die Form

$$\nabla F(X)\colon\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\,, \qquad \nabla F(X)H = -X^{-1} H X^{-1}\,,$$

   hat.

5. Implementieren Sie in Matlab das Newtonverfahren aus Aufgabe 4 zur Inversion einer Matrix.

6. Implementieren Sie in MATLAB das Newtonverfahren zur Lösung der Gleichung $F(x) = 0$, wobei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige (differenzierbare) Funktion ist. Dabei sollen dem Programm die Funktion $F$, ihre Ableitung $\nabla F$, sowie ein Startwert $x_0$ übergeben werden. Testen Sie Ihr Programm

   *Hinweis:* In MATLAB haben Sie im Prinzip zwei Möglichkeiten, Funktionen als Argumente zu übergeben und dann in Ihrem Programm auszuwerten. Eine Möglichkeit ist, den Namen der Funktion (als String, also in einfachen Anführungszeichen) zu übergeben und den Befehl `feval` zur Funktionsauswertung verwenden. Alternativ können Sie auch ein *function handle* (also ein Argument der Form `@f`, wobei `f` die Funktion ist) übergeben und dann die Funktion entweder direkt (also in der Form `f(x)`) oder mittels `feval` auswerten.

   Betrachten Sie beispielsweise die Funktion

```
function y = myfun(f)
y = feval(f,1);
end
```

   Wenn Sie nun `myfun('sin')` aufrufen, erhalten Sie als Ergebnis sin(1) zurück. Genau dasselbe Ergebnis bekommen Sie auch mit dem Aufruf `myfun(@sin)`.