Übungen zu Numerische Mathematik

Markus Grasmair & Nicolas Thorstensen

1. Übungsblatt

März 2011

1. Bestimmen Sie die absoluten und relativen Konditionszahlen der folgenden Funktionen:

$$F(x,y) := \exp(x-y)\,,$$
$$G(x,y) := \sin(x) - \sin(y)\,.$$

Wann sind diese Funktionen schlecht konditioniert?

2. Bei der **Rückwärtsanalyse** interpretiert man die berechnete Näherung als exakte Lösung eines Problems mit gestörten Eingangsdaten, also $!F(x) = F(x + \Delta x)$ und untersucht die Größe $|\Delta x|$. Gibt es mehrere Urbilder $x + \Delta x$, so nimmt man traditionell eines mit betragskleinster Störung Δx. Gilt dann

$$\left\| \frac{\Delta x}{x} \right\| \le C_R \mathbf{eps}\,,$$

wobei $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ die Euklidsche Norm ist, und C_R nicht zu groß ist, so nennen wir den Algorithmus $!F$ **rückwärts stabil**.
Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation unter den Modellannahmen

$$a(!+)b = (a+b)(1+\varepsilon)\,, \qquad a(!\cdot)b = (a\cdot b)(1+\varepsilon)\,,$$

wobei ε kleiner als die Maschinengenauigkeit ist, rückwärts stabil sind.

3. Seien $f,\, g\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D (hier sind auch die Werte $x_0 = \pm\infty$ zugelassen). Die *Landauschen Symbole* O und o sind wie folgt definiert:

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ für } x \to x_0 :\Longleftrightarrow \limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < +\infty\,,$$
$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ für } x \to x_0 :\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0\,.$$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für stetiges f mit $f(0) = 0$ gilt: $f(x) = o(1)$ für $x \to 0$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x) = O(x^{k+1})$ für $x \to 0$ genau dann, wenn $f(x) = o(x^k)$ für $x \to 0$.

(c) Wenn $f_1(x) = O\big(g(x)\big)$ für $x \to x_0$, $f_2(x) = O\big(g(x)\big)$ für $x \to x_0$ und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$cf_1(x) + f_2(x) = O\big(g(x)\big) \text{ für } x \to x_0 \,.$$

4. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Berechnen sie die Frobenius- und Spektralnorm der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{pmatrix}$$

5. Die Eulersche Zahl e kann man einerseits mithilfe der Formel

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und andererseits mithilfe der Formel

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

näherungsweise berechnen. Schreiben Sie zwei MATLAB-Programme, die die Folgenglieder $a_n = \big(1+1/n\big)^n$ bzw. Partialsummen $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ für $n \in \mathbb{N}$ berechnen, und vergleichen Sie die beiden Methoden.

Eine der beiden Methoden konvergiert numerisch nicht gegen e. Welche? Weshalb?

6. Sei $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \,. \tag{1}$$

Um das Polynom an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ auszuwerten, kann man direkt die Definition (1) verwenden. Eine andere Möglichkeit ist die folgende: Setze $P_0(x) := c_n$ und berechne für $i = 1, \ldots, n$,

$$P_i(x) = c_{n-i} + x \cdot P_{i-1}(x). \tag{2}$$

Es gilt $P_n(x) = P(x)$.

Schreiben Sie zwei MATLAB-Funktionen, die aus den Eingabeargumenten $c = [c_0, \ldots, c_n]$ und x die Auswertung des Polynoms P an der Stelle x mit den oben genannten Methoden berechnen. Testen Sie die Funktionen am Polynom

$$\begin{aligned} P(x) = 19683\,x^9 &- 472392\,x^8 + 5038848\,x^7 - 31352832\,x^6 \\ &+ 125411328\,x^5 - 334430208\,x^4 + 594542592\,x^3 \\ &- 679477248\,x^2 + 452984832\,x - 134217728 \end{aligned}$$

für $x = 8/3$. Welche Methode liefert ein besseres Ergebnis? Warum?