Übungsblatt 10

1. **(Dimensionsanalyse)** Wir betrachten einen senkrecht aufgestellten Stab mit rechteckigem Querschnitt, der Länge ℓ, der Breite b und der Höhe h. Weiters sei der Elastizitätsmodul E des Stabs gegeben. Wir belasten den Stab nun vertikal mit einer Kraft f.

   Was können Sie mit Dimensionsanalyse über die zum Brechen des Stabs benötigte Kraft aussagen, wenn Sie annehmen, daß die einzig dafür relevanten physikalischen Größen ℓ, b, h und E sind?

   Hinweis: Wählen wir als Basisgrößen die Länge L und die Kraft F, so hat der Elastizitätsmodul E die Dimension $\dim(E) = FL^{-2}$.

2. **(Skalierung und asymptotische Lösung)** Wir modellieren die Fallgeschwindigkeit $v \in C^1([0,\infty))$ eines durch die Luft herabfallenden Körpers mit (ausreichend großer) anfänglicher Geschwindigkeit $v_0 > 0$ durch die Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
mv'(t) &= mg - kv^2(t), \quad t > 0,\\
v(0) &= v_0,
\end{aligned}
$$

   wobei m die Masse des Körpers und g die Erdbeschleunigung bezeichne und die Konstante $k > 0$ den Luftwiderstand parametrisiere.

   (a) Skalieren Sie Geschwindigkeit und Zeit, so daß in den neuen Variablen $\bar{t} = \lambda t$ und $\bar{v}(\bar{t}) = \mu v(t)$ die Gleichung die Form

$$
\begin{aligned}
\bar{v}'(\bar{t}) &= 1 - \varepsilon \bar{v}^2(\bar{t}),\\
\bar{v}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

   hat, und bestimmen Sie ε.

   (b) Entwickeln Sie auf einem gegebenen kompakten Intervall $[0,T]$ für genügend kleine Werte ε die Lösung $\bar{v}$ in ε:

$$
\bar{v}(\bar{t}) = a_0(\bar{t}) + \varepsilon a_1(\bar{t}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \bar{t} \in [0,T],
$$

   und berechnen Sie die ersten beiden Koeffizienten: die Lösung $a_0 \in C^1([0,T])$ des reduzierten Problems und den ersten Korrekturterm $a_1 \in C^1([0,T])$.

   (c) Skizzieren Sie die so erhaltene Näherungslösung für $\bar{v}$.

3. **(Rekursionsgleichung)** Wir betrachten für beliebiges $c > 0$ die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = c(1 - |2x_n - 1|), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

für die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

   (a) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter c die stationären Punkte der Rekursionsgleichung (1).

   (b) Bestimmen Sie für jeden dieser stationären Punkte, ob er asymptotisch stabil, stabil oder instabil ist.

   (c) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter c die Periodenpunkte der Ordnung 2 der Rekursionsgleichung (1).

4. **(Dynamisches System)** Wir betrachten das von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= ay(t), & t > 0, \\ y'(t) &= x(t)(x(t) - 1)(x(t) - b), & t > 0, \end{aligned}$$

für die beiden Funktionen $x, y \in C^1([0, \infty))$.

   (a) Berechnen Sie die stationären Lösungen dieses Gleichungssystems.

   (b) Linearisieren Sie das Gleichungssystem um die stationären Lösungen herum.

   (c) Analysieren Sie, welche der stationären Lösungen asymptotisch stabil, stabil beziehungsweise instabil sind.

5. **(Energieerhaltung)** Wir betrachten eine schwingende Saite der Länge $L > 0$ mit Auslenkung $u \in C^2([0, \infty) \times [0, L])$, die wir mittels der eindimensionalen Wellengleichung modellieren:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad t > 0,\ x \in (0, L),$$

wobei $c > 0$ die Schallgeschwindigkeit der Saite bezeichnet. Die beiden Enden der Saite lassen wir dabei frei, das heißt, wir haben die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) &= 0, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = 0$ lenken wir die Saite nun gemäß einer Funktion $u_0 \in C^2([0, L])$ mit $u_0'(0) = u_0'(L) = 0$ aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= 0, & x \in [0, L], \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Saite für $u_0 \neq 0$ nie zur Ruhe kommt, also zu keiner Zeit $t > 0$ sowohl $u(t, \cdot)$ als auch $\frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$ die Nullfunktion ist.

—