# Übungsblatt 9

1. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit den Anfangswerten

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ gegeben. Wir definieren die Funktion $v \in C^2(\bar{\Omega})$,

$$\Omega = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi + \eta > 0\},$$

   durch

$$v(\xi,\eta) = u(\xi+\eta, \xi-\eta), \quad (\xi,\eta) \in \bar{\Omega}.$$

   Zeigen Sie, daß $u$ genau dann eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist, wenn $v$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) = 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta) \in \Omega$$

   erfüllt.

   (b) Folgern Sie, daß sich jede Lösung in der Form

$$u(t,x) = F(t-x) + G(t+x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},$$

   schreiben läßt, und bestimmen Sie die Funktionen $F$ und $G$ aus den Anfangsbedingungen.

2. Sei $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

zur Wellengeschwindigkeit $c > 0$ mit Anfangsdaten $u_0 \in C^2_c(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, daß dann die Energie $E[u] : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$E[u](t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 \right) \mathrm{d}x, \quad t \geq 0,$$

der Welle $u$ eine konstante Funktion ist.

(b) Sei nun allgemeiner $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so daß

$$u(0,x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \setminus I$$

gilt.
Zeigen Sie, daß die Energie $E_I[u] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$E_I[u](t) = \frac{1}{2} \int_I \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)^2 \right) \mathrm{d}x, \quad t > 0,$$

der Welle $u$ auf dem Intervall $I$ eine monoton fallende Funktion ist.

3. **(Bonusaufgabe)** Wir betrachten eine zur Zeit $t = 0$ ruhende Saite der Länge 1, deren Auslenkung $u \in C^2([0,\infty) \times [0,1])$ aus der Gleichgewichtslage wir durch die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0,\ x \in (0,1),$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= 0, && x \in [0,1], \\ u(0,x) &= 0, && x \in [0,1] \end{aligned}$$

modellieren, wobei wir die Wellengeschwindigkeit der Einfachheit halber auf eins normiert haben.

Als Randbedingung halten wir nun die Saite im Punkt $x = 0$ fest, verlangen also, daß

$$u(t,0) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \geq 0$$

gilt, und bewegen das andere Ende der Saite gemäß einer vorgegebenen Funktion $\phi \in C^1([0,\infty))$ auf und ab:

$$u(t,1) = \phi(t) \quad \text{für alle} \quad t \geq 0.$$

Um konsistent mit den Anfangsbedingungen zu bleiben, verlangen wir, daß $\phi(0) = \phi'(0) = 0$ gilt.

(a) Verwenden Sie die in Aufgabe 1.(b) hergeleitete Formel, um die Lösung $u$ dieses Gleichungssystems zu bestimmen.

(b) Wie verhält sich die Lösung, wenn sich $\phi$ zu einer antisymmetrischen, 2-periodische Funktion fortsetzen läßt, also

$$\phi(t+1) = -\phi(t) \quad \text{für alle} \quad t \geq 0$$

gilt?