Übungsblatt 8

1. Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0,\ x \in [0,1], \tag{1}$$

mit Anfangszustand

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

für eine gegebene Funktion $u_0 \in C^\infty([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$ und den Randbedingungen

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \text{für alle} \quad t > 0. \tag{3}$$

(a) Sei $v \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} v(0,x) &= u_0(x) && \text{für alle} \quad x \in [0,1], \\ v(t,x) &= -v(t,-x) && \text{für alle} \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \\ v(t,x+2) &= v(t,x) && \text{für alle} \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich, daß dann die Funktion $u \in C^\infty([0,\infty)\times[0,1])$, definiert durch

$$u(t,x) = v(t,x) \quad \text{für} \quad t \geq 0,\ x \in [0,1],$$

eine Lösung des ursprünglichen Problems (1), (2), (3) ist.

(b) Wir entwickeln die periodische Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto v(t,x)$ nun für jedes $t \geq 0$ in eine Fourierreihe:

$$v(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}_k(t) \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k x}, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen $\hat{v}_k$ dann die Differentialgleichungen

$$\hat{v}_k'(t) = -\pi^2 k^2 \hat{v}_k(t), \quad t > 0,\ k \in \mathbb{Z},$$

erfüllen müssen.

(c) Folgern Sie, daß sich die Lösung v in der Form

$$v(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \mathrm{e}^{-\pi^2 k^2 t} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k x}$$

mit geeigneten Konstanten $C_k \in \mathbb{C}$ schreiben lassen muß.

(d) Zeigen Sie, daß die Konstanten C_k dann durch

$$C_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} v(0,y) \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} k y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^1 u_0(y) \sin(\pi k y) \,\mathrm{d}y, \quad k \in \mathbb{Z},$$

gegeben sind.

(e) Schließen Sie daraus, daß

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-\pi^2 k^2 t} \sin(\pi k x), \quad t \geq 0,\ x \in [0,1],$$

mit den Konstanten

$$c_k = 2 \int_0^1 u_0(y) \sin(\pi k y) \,\mathrm{d}y, \quad k \in \mathbb{N},$$

eine Lösung des ursprünglichen Problems (1), (2), (3) ist.

(f) Bestimmen Sie explizit die Lösung u von (1), (2), (3) für den Anfangszustand

$$u_0(x) = 2\sin(\pi x) + \sin(3\pi x), \quad x \in [0,1].$$

2. (a) Verifizieren Sie, daß für jede beschränkte Funktion $u_0 \in C(\mathbb{R})$ die Funktion $u \in C^2((0,\infty) \times \mathbb{R})$, gegeben durch

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) \,\mathrm{d}y, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

eine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(t,x)$ für alle $t > 0$ und für beliebige beschränkte Anfangswerte $u_0 \in C(\mathbb{R})$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist.

—