Dr. Daniel Leitner
Dr. Peter Elbau

Übungen zu Modellierung
Fakultät für Mathematik

Universität Wien
10. Dezember 2012

Übungsblatt 7

1. Wir betrachten die Lotka-Volterra-Gleichungen, wobei wir zusätzlich berücksichtigen wollen, daß die Population x der Beute aufgrund fehlender Resourcen eine gewisse Größe $K > 0$ nicht übersteigen kann. Dies führt uns zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t)(K - x(t)) - bx(t)y(t), \quad && t > 0, \\ y'(t) &= cx(t)y(t) - dy(t), && t > 0, \end{aligned}$$

für die Populationen $x, y \in C^1([0, \infty))$ mit den positiven Konstanten a, b, c und d.

(a) Bestimmen Sie die stationären Lösungen dieses Gleichungssystems und linearisieren Sie es um diese Lösungen herum.

(b) Zeigen Sie, daß die stationäre Lösung

$$\big(x(t), y(t)\big) \equiv \big(\tfrac{d}{c}, \tfrac{a}{b}(K - \tfrac{d}{c})\big)$$

für $K > \frac{d}{c}$ asymptotisch stabil ist.

2. Sei $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Lipschitz-Bedingung

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \le L|x - \tilde{x}| \quad \text{für alle} \quad t \in [0, \infty) \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

mit einer Konstanten $L > 0$ erfüllt, und sei weiters $y \in C^2([0, T])$ für ein $T > 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t \in (0, T), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

für ein gegebenes $y_0 \in \mathbb{R}$. Zur Lösung dieser Differentialgleichung betrachten wir das implizite Eulerverfahren mit Schrittweite $h \in (0, \frac{1}{L})$, dessen Approximation $y_k \in \mathbb{R}$ für den Wert $y(t_k)$, $t_k = hk$, durch die implizite Rekursionsgleichung

$$y_k = y_{k-1} + hf(t_k, y_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

definiert ist.

Zeigen Sie, daß sich der Fehler $|y_k - y(t_k)|$ des impliziten Eulerverfahrens rekursiv durch

$$|y_k - y(t_k)| \le \frac{1}{1 - hL} \left(|y_{k-1} - y(t_{k-1})| + \frac{h^2}{2} \max_{s \in [0,T]} |y''(s)| \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

abschätzen läßt.

3. Wir betrachten wiederum das Anfangsproblem (1). Zum Annähern einer Lösung wollen wir diesmal die Mittelpunktregel verwenden. Dabei konstruieren wir für feste Schrittweite $h > 0$ die Näherung y_k für den Wert $y(t_k)$, $t_k = hk$, durch

$$y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1} + \tfrac{h}{2}, \eta_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei η_{k-1} die durch Verwendung der expliziten Eulermethode erhaltene Approximation für $y(t_{k-1} + \frac{h}{2})$ ist:

$$\eta_{k-1} = y_{k-1} + \frac{h}{2} f(t_{k-1}, y_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie diejenigen Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für die diese Methode, angewendet auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda y(t), \quad t > 0, \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

eine gegen null konvergierende Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liefert.

4. Wir betrachten noch einmal das (skalierte) Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} v'(t) &= 1 - v(t), \quad t > 0, \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

für die Geschwindigkeit v eines zur Zeit $t = 0$ ruhenden, im Gravitationsfeld fallenden Teilchens unter Berücksichtigung des Luftwiderstands.

   (a) Schreiben Sie ein Programm, das das Anfangswertproblem (2) mit Hilfe der expliziten Eulermethode löst.

   (b) Ergänzen Sie Ihr Programm, so daß es das Anfangswertproblem (2) auch mit Hilfe der impliziten Eulermethode lösen kann.

   (c) Überprüfen Sie die Resultate mit Hilfe der in Blatt 1 hergeleiteten expliziten Lösung.

—