Übungsblatt 6

1. Wir betrachten für $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = Ay(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

für die Funktion $y \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}^2)$.

(a) Zeigen Sie, daß die einzige stationäre Lösung $y(t) \equiv 0$ ist.

(b) Überzeugen Sie sich, daß eine Transformation $z(t) = Sy(t)$, $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, exisitiert, so daß z (je nach Wahl von A) entweder die Differentialgleichung

$$z'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z(t) \tag{2}$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, oder die Differentialgleichung

$$z'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} z(t) \tag{3}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $z \in C^1([0, \infty); \mathbb{C}^2)$ der Differentialgleichung (2).

(d) Finden Sie die allgemeine Lösung $z \in C^1([0, \infty); \mathbb{C}^2)$ der Differentialgleichung (3).

Hinweis: Fassen Sie die Differentialgleichung als Gleichungssystem für die Komponenten z_1 und z_2 auf, und reduzieren Sie das System dann auf eine Differentialgleichung der Form

$$z_1'(t) = \lambda z_1(t) + C\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{für ein} \quad C \in \mathbb{C}.$$

Diese Differentialgleichung können Sie mit dem Ansatz $z_1(t) = c(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ lösen.

(e) Diskutieren Sie, in welchen Fällen die Lösung $y(t) \equiv 0$ stabil (d.h. jede Lösung von (1) mit einem Anfangswert, der genügend nahe bei 0 ist, bleibt für alle Zeiten nahe bei 0) beziehungsweise asymptotisch stabil (d.h. stabil und jede Lösung von (1) mit einem Anfangswert, der genügend nahe bei 0 ist, konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0).

2. Sei nun die nichtlineare Gleichung

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t > 0,$$

für die Funktion $y \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}^2)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ gegeben. Weiters sei $y_0 \in \mathbb{R}^2$ eine Nullstelle des Vektorfelds f: $f(y_0) = 0$, und der Realteil aller Eigenwerte der Matrix $\mathrm{d}f(y_0)$ sei kleiner als null.

(a) Wir führen die Funktion $z \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}^2)$, gegeben durch $z(t) = y(t) - y_0$ für alle $t \in [0,\infty)$, ein. Zeigen Sie, daß z eine Differentialgleichung der Form

$$z'(t) - Az(t) = \xi(z(t)) \tag{4}$$

mit $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}^2)$ und einer Funktion $\lim_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{\|x\|} = 0$ erfüllt.

(b) Verifizieren Sie, daß jede Lösung von (4) die implizite Gleichung

$$z(t) = \sum_{i=1}^{2} \left(z_i(0) z_{\mathrm{h}}^{(i)}(t) + \int_0^t \xi_i(z(s)) z_{\mathrm{h}}^{(i)}(t-s)\,\mathrm{d}s \right)$$

erfüllt, wobei $z_{\mathrm{h}}^{(i)} \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}^2)$, $i = 1,2$, die Lösungen der homogenen Gleichung

$$z_{\mathrm{h}}'(t) = Az_{\mathrm{h}}(t) \quad \text{mit Anfangswerten } z_{\mathrm{h}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } z_{\mathrm{h}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind.

(c) Zeigen Sie, daß Konstanten $\alpha > 0$, $c > 0$ und $\delta > 0$ existieren, so daß auf jedem Intervall $[0,T]$, $T > 0$, auf dem $\|z(t)\| < \delta$ für alle $t \in [0,T]$ gilt, die Ungleichung

$$\|z(t)\| \le c\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\|z(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\|z(s)\|\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle} \quad t \in [0,T]$$

erfüllt ist, und folgern Sie mit der Gronwall'schen Ungleichung, daß dann

$$\|z(t)\| \le c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\|z(0)\| \quad \text{für alle} \quad t \in [0,T].$$

gilt.

Hinweis: Die Gronwall'sche Ungleichung besagt, daß eine stetige Funktion $u \in C([0,T])$, die die Ungleichung

$$u(t) \le a + b\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle} \quad t \in [0,T]$$

mit beliebigen Konstanten $a \in \mathbb{R}$, $b \ge 0$ erfüllt, durch

$$u(t) \le a\mathrm{e}^{bt}, \quad t \in [0,T],$$

abgeschätzt werden kann.

(d) Folgern Sie daraus, daß $y(t) \equiv y_0$ eine asymptotisch stabile stationäre Lösung ist.

—