# Übungsblatt 5

1. Wir betrachten das Beverton-Holt-Modell für das Populationswachstum. Die Populationsgröße $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset [0,\infty)$ genügt demnach einer Rekursionsgleichung der Form
$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{1+bx_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$
für gewisse Parameter $a > 1$ und $b > 0$.

   (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Rekursionsgleichung (1) und diskutieren Sie die Stabilität dieser Punkte.

   (b) Finden Sie für gegebenen Anfangswert $x_0 \geq 0$ die Lösung der Rekursionsgleichung (1), indem Sie zuerst die Rekursionsgleichung
$$y_{n+1} = \frac{1}{a} y_n + \frac{b}{a}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
für die Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, definiert durch $y_n = \frac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, herleiten.

   (c) Zeigen Sie, daß sich die Rekursionsgleichung (1) auf die Form
$$x_{n+1} - x_n = rx_{n+1}\left(1 - \frac{x_n}{K}\right), \quad r = \frac{a-1}{a}, \quad K = \frac{a-1}{b}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
bringen läßt, weshalb wir sie als diskrete Version der Differentialgleichung
$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad t > 0, \tag{2}$$
interpretieren können.

   (d) Finden Sie mit Hilfe der Separation der Variablen die Lösung $x \in C^1([0,\infty))$ der Differentialgleichung (2) zu gegebenem Anfangswert $x(0) = x_0$ und vergleichen Sie die Lösung mit derjenigen der Rekursionsgleichung.

   *Hinweis:* Eine Differentialgleichung der Form $x'(t) = f(x(t))g(t)$, $t > 0$, mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ läßt sich mittels Separation der Variablen lösen, indem man verwendet, daß eine Lösung $x \in C^1([0,\infty))$ die Gleichung
$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$
erfüllt.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $x \in \mathbb{R}$ ein periodischer Punkt mit Periodenlänge 2 der Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, daß die Rekursionsgleichung auch einen stationären Punkt besitzt.

3. Wir betrachten die als Autoprotolyse bezeichnete chemische Reaktion

$$\mathrm{H^3O^+} + \mathrm{OH^-} \rightleftharpoons 2\mathrm{H^2O}$$

in reinem Wasser. Wir bezeichnen mit den Funktionen $N_{\mathrm{H^3O^+}}, N_{\mathrm{OH^-}}, N_{\mathrm{H^2O}} \in C^1([0,\infty))$ die Stoffmenge der jeweiligen Komponenten als Funktion der Zeit und modellieren die Reaktion durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} N'_{\mathrm{H^3O^+}}(t) &= -\alpha N_{\mathrm{H^3O^+}}(t) N_{\mathrm{OH^-}}(t) + \beta N_{\mathrm{H^2O}}(t), \quad && t > 0, \\ N'_{\mathrm{OH^-}}(t) &= N'_{\mathrm{H^3O^+}}(t), && t > 0, \\ N'_{\mathrm{H^2O}}(t) &= -2N'_{\mathrm{H^3O^+}}(t), && t > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\alpha > 0$ die Reaktionsgeschwindigkeit des Prozesses $\mathrm{H^3O^+} + \mathrm{OH^-} \to 2\mathrm{H^2O}$ und $\beta > 0$ die Reaktionsgeschwindigkeit des umgekehrten Prozesses parametrisiert.

(a) Finden Sie die stationären Lösungen des Gleichungssystems (3). Was läßt sich über die Stabilität der stationären Lösungen sagen?

(b) Führen Sie die neuen Variablen

$$\begin{aligned} x(t) &= N_{\mathrm{H^3O^+}}(t) + N_{\mathrm{OH^-}}(t), \\ y(t) &= N_{\mathrm{H^3O^+}}(t) - N_{\mathrm{OH^-}}(t) \quad \text{und} \\ z(t) &= N_{\mathrm{H^3O^+}}(t) + N_{\mathrm{OH^-}}(t) + N_{\mathrm{H^2O}} \end{aligned}$$

ein, und schreiben Sie die Gleichungen (3) in

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{\alpha}{2}x^2(t) - 2\beta x(t) + \frac{\alpha}{2}y^2(t) + 2\beta z(t), \quad && t > 0, \\ y'(t) &= 0, && t > 0, \\ z'(t) &= 0, && t > 0, \end{aligned}$$

um.

(c) Bestimmen Sie zu vorgegebenen Anfangsstoffmengen $N_{\mathrm{H^3O^+}}(0) > 0$, $N_{\mathrm{OH^-}}(0) > 0$ und $N_{\mathrm{H^2O}}(0) > 0$ die Lösung des Gleichungssystems (3).

—