Übungsblatt 4

1. Sei $x \in \mathbb{R}$ ein stationärer Punkt der Rekursionsgleichung
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
für eine in einer offenen Umgebung des Punkts x stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Zeigen Sie, daß der Punkt x stabil ist, falls $|f'(x)| < 1$ gilt.
   (b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, wo $|f'(x)| = 1$ ist und x ein instabiler stationärer Punkt ist.
   (c) Finden Sie ein Beispiel einer Funktion f, wo $|f'(x)| = 1$ ist und x ein stabiler stationärer Punkt ist.
   (d) Existiert eine Funktion f, wo $|f'(x)| > 1$ ist und x dennoch ein stabiler stationärer Punkt ist?

2. Wir betrachten die logistische Gleichung
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$
für den Spezialfall $r = 4$.
   (a) Zeigen Sie, daß sich jede Lösung $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ der Rekursionsgleichung (1) in der Form
$$x_n = \sin^2(2\pi y_n)$$
schreiben läßt, wobei die Folge $(y_n)_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1)$ der Rekursionsgleichung
$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n & \text{für } y_n \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2y_n - 1 & \text{für } y_n \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2}$$
genügt.
   (b) Verifizieren Sie, daß, wenn man y_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ im Binärsystem als (wann immer möglich endliche) Reihe darstellt:
$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} 2^{-k}, \quad a_{k,n} \in \{0, 1\}, \quad k \in \mathbb{N},$$
die Rekursionsgleichung (2) für $(y_n)_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1)$ äquivalent zur Rekursionsgleichung
$$a_{k,n+1} = a_{k+1,n}, \quad k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0,$$
für die Folge $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0} \subset \{0, 1\}$ der Koeffizienten ist.
   (c) Beweisen Sie damit, daß zu beliebigem $m \in \mathbb{N}$ ein periodischer Punkt $x \in [0, 1]$ der Rekursionsgleichung (1) mit Periodenlänge m existiert.

—