Übungsblatt 3

1. Wir betrachten die Gleichung
$$x^2 + \varepsilon x - 1 = 0$$
für einen genügend kleinen Parameter $\varepsilon \ll 1$.
   (a) Finden Sie eine Näherungslösung $x > 0$ dieser Gleichung, indem Sie x als Potenzreihe in ε schreiben:
   $$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k,$$
   und dies in die Gleichung einsetzen. Bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_k und berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3.
   (b) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung, indem Sie die explizite Lösung $x > 0$ der Gleichng in eine Potenzreihe in ε entwickeln.

2. Finden Sie eine explizite Lösung der Rekursionsgleichung
$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$
zu gegebenen Anfangswerten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.
Bemerkung: Für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen.

3. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3$.
   (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Rekursionsformel
   $$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$
   (b) Diskutieren Sie, welche dieser stationären Punkte stabil und welche instabil sind.

4. Wir betrachten die Rekursionsgleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

mit dem Anfangswert $x_0 > 0$. Diskutieren Sie in Abhängigkeit vom Anfangswert x_0, ob die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Bemerkung: Für den Anfangswert $x_0 = 1$ wird der Grenzwert x dieser Rekursionsgleichung auch als Kettenbruch geschrieben:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}.$$

—