Dr. Daniel Leitner | **Übungen zu Modellierung** | Universität Wien
Dr. Peter Elbau | Fakultät für Mathematik | 22. Oktober 2012

Übungsblatt 2

1. Wir betrachten den Grenzwert $x \to 0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für die Landau-Symbole O und o:

   (a) $O(x^{\frac{3}{2}}) \subset o(x) \subset O(x^{\frac{1}{2}})$,

   (b) $(1 + O(x))^2 = 1 + O(x^2)$,

   (c) $\sqrt{o(x^2)} = o(x)$,

   (d) $o(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{o(x)}$,

   (e) $\frac{x^3}{\sin(x)+O(x)} \subset o(1)$,

   (f) $\frac{1+O(x)}{1+O(x)} \subset 1 + O(x)$.

2. Zeigen Sie, daß für $\alpha > 0$ die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty \log(1+\sqrt{\alpha}|x|)\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$$

   proportional zu $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ sind.

3. Wir betrachten erneut eine fallende Kugel mit Radius r und Masse m unter der Erdanziehungskraft g. Für die Fallgeschwindigkeit $v(t)$ der Kugel nach der Zeit t gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} mv'(t) &= mg - 6\pi r\eta v(t), \quad t > 0, \\ v(0) &= 0, \end{aligned}$$

   wobei η die dynamische Viskosität der Luft bezeichne.

   Finden Sie eine Skalierung $\bar{t} = \lambda t$ und $\bar{v}(\bar{t}) = \mu v(t)$, so daß sich die Beziehung zu

$$\begin{aligned} \bar{v}'(\bar{t}) &= 1 - \bar{v}(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0, \\ \bar{v}(0) &= 0 \end{aligned}$$

   vereinfacht.

4. Finden Sie eine Skalierung $\bar{t} = \lambda_1 t$, $\bar{x} = \lambda_2 x$, $\bar{u}(\bar{t},\bar{x}) = \lambda_3 u(t,x)$, $\bar{u}_0(\bar{x}) = \lambda_3 u_0(x)$, so daß sich die Wärmeleitungsgleichungen für einen Stab der Länge ℓ mit anfänglicher Temperaturverteilung $u_0 \in C^\infty([0,\ell])$ mit $u_0(0) = u_0(\ell) = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), && t > 0,\ x \in (0,\ell), \\ u(0,x) &= u_0(x), && x \in [0,\ell], \\ u(t,0) &= u(t,\ell) = 0, && t > 0, \end{aligned}$$

zu

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}(\bar{t},\bar{x}) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}(\bar{t},\bar{x}), \qquad & \bar{t} > 0,\ \bar{x} \in (0,1), \\
\bar{u}(0,\bar{x}) = \bar{u}_0(\bar{x}), \qquad & \bar{x} \in [0,1], \\
\bar{u}(\bar{t},0) = \bar{u}(\bar{t},1) = 0, \qquad & \bar{t} > 0,
\end{aligned}
$$

mit $\int_0^1 \bar{u}_0(\bar{x})\,\mathrm{d}\bar{x} = 1$ vereinfachen.