Peter Elbau
Rada Weishäupl

Übungen zu Mathematik
Zentrum für Molekulare Biologie

Universität Wien
11. Juni 2013

Probetest zur Abschlußprüfung

1. Bestimmen Sie alle Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des Polynoms

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(z) = (z^2 - 3z - 4)(z^3 - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

2. (a) In welchen Punkten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{\mathrm{e}^{x-2} - 1} & \text{für } x \neq 2, \\ 0 & \text{für } x = 2, \end{cases}$$

stetig?

(b) In welchen Punkten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| - 1$$

differenzierbar?

3. Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} 2x - \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x + 1}$, (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(x)}{x - 1}$.

4. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4\log(1 + x) + 5\,\frac{x - x^2}{1 + x}.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion f.
(b) Finden Sie das globale Maximum und Minimum der Funktion f.
(c) Zeigen Sie, daß f konkav ist.
(d) Skizzieren Sie die Funktion f.

5. Man berechne:

(a) $\displaystyle\int_0^3 (4e^x - e^{3x})dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^{-3/4}dx$

6. In der folgenden Tabelle sind für drei Weinbergschnecken jeweils der grösste Durchmesser x_i des Schneckenhauses und die Masse y_i der Schnecke eingetragen.

i	x_i	y_i
1	2.8	8
2	3.8	17
3	4.8	41

   Wenn sich alle Abmessungen des Hauses und des darin lebenden Tieres wähnend dessen Entwicklung proportional zueinander vergrössern, dann müsste man erwarten, dass die Masse y_i mit der dritten Potenz des größten Durchmessers x_i wächst. Die Masse ist proportional zum Volumen und das Volumen wächst bei ähnlicher Vergrösserung immer mit der 3.Potenz einer Längenabmessung. In diesem Fall wäre also:

$$y = Cx^3$$

   Durch Logarithmieren beider Seiten, ist ein linearer Zusammenhang zwischen $\ln x_i$ und $\ln y_i$ gegeben. Man ermittle C mit Hilfe der Ausgleichsgeraden, wobei die Steigung der Geraden in diesem Fall gleich 3 ist.

7. Man löse das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} x' &= tx^2 + t \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

   Für welche t existiert die Lösung? Hinweis: $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

8. Es seien N_1 Moleküle einer Substanz S_1 und N_2 Moleküle einer Substanz S_2 vorhanden. Je ein Molekül von S_1 und S_2 können miteinander reagieren und ergeben dann ein Molekül einer neuer Substanz S_3. Es sei $x(t)$ die Anzahle der zur Zeit t vorhandenen S_3 Moleküle. Man nimmt an, dass $x(t)$ gemäß der Differentialgleichung:

$$x' = k(N_1 - x)(N_2 - x) \quad \text{mit } k > 0 \text{ und } N_1 > N_2$$

   wächst. Wie lautet die Lösung dieser Gleichung zu $x(0) = 0$ und gegen welchen Limes strebt $x(t)$ für $t \to \infty$.

—