

MATHEMATIK FÜR MOLEKULARE BIOLOGEN, SS2013
28. MAI 2013

8. ÜBUNGSBLATT

1. Der Energieverbrauch pro Zeiteinheit von Zugvögeln, die mit Geschwindigkeit v gegen die umgebende Luft fliegen, ist durch die folgende Formel gegeben:

$$e = Av^3\sigma + \frac{M^2}{Bv\sigma}$$

Dabei wird die e in J/s (Joule/Sekunde) gemessen. M ist die Masse des Vogels in g (Gramm) und σ die Luftdichte in g/m^3 . A und B sind Konstanten, die von Gestalt und Physiologie des Vogels abhängen. Ihre Dimensionen haben wir in der Vorlesung ermittelt. A hat die Dimension einer Fläche, die Einheit ist m^2 und die Einheit von B ist s^4 . Die Geschwindigkeit v ist in m/s angegeben.

Es ist anzunehmen, dass sich die Zugvögel durch die Wahl der Flughöhe Luftschichten mit günstigem σ aussuchen. Man bestimme das optimale σ , das bei gegebenem v zu minimaler Energie pro Zeiteinheit e führt.

2. Angenommen, das optimale σ in Beispiel 1 wäre $10^{-3}g/cm^3$, in welcher Höhe wäre diese für die Vögel optimale Luftdichte gegeben, wenn σ nach der Formel

$$\sigma(h) = 1.25 \cdot 10^{-3} e^{-h/\beta} g/cm^3$$

mit der Höhe h (in m (Meter) über dem Erdboden) abnimmt, wobei $\beta = 8000m$?

3. Man löse folgende Anfangswertprobleme (v_0 , g und φ gegebene Parameter sind):

a) $x''(t) = 0$
 $x'(0) = v_0 \cos(\varphi)$
 $x(0) = 0$

b) $y''(t) = -g$
 $y'(0) = v_0 \sin(\varphi)$
 $y(0) = 0$

4. Eine Kugel wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel φ gegen die Horizontale schräg nach oben geworfen (d.h. $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Wir trennen die Komponenten in die Vertikal- und Horizontalkomponente und betrachten die Bahnkurve in der Parameterdarstellung $x(t)$, $y(t)$.

$x(t)$ gibt die horizontale Auslenkung zum Zeitpunkt t an und ist Lösung des Anfangwertproblems 3a) $y(t)$, die Höhe zum Zeitpunkt t , ist Lösung des Anfangwertproblems 3b). Welcher Winkel φ führt zur maximalen Wurfweite?

5. Die Dynamik einer Population werde modelliert durch die Differentialgleichung

$$N' = 4N + 3N^2 - N^3$$

$N(t)$ gibt die dimensionslose Populationsgröße zum Zeitpunkt t an. Was ist das Langzeitverhalten für verschiedene Anfangspopulationsgrößen?