Lineare Algebra – Übungsteil 13

WS 2010/2011

M. Grasmair

162. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass eine Norm $\|\cdot\|_A$ auf $\mathbb{C}^n$ existiert, sodass die von $\|\cdot\|_A$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ die Gleichung
$$\|A\| = \rho(A)$$
erfüllt. Dabei bezeichnet $\rho(A)$ den *Spektralradius* der Matrix A, also den Betrag des (betragsmäßig) größten Eigenwertes von A.

163. Für welche $c > 0$ ist die durch
$$\|A\| := c \max_{i,j} |a_{i,j}|$$
definierte Norm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ submultiplikativ? Existiert für ein $c > 0$ eine Vektornorm auf $\mathbb{C}^n$, die $\|\cdot\|$ induziert?

164. Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegungen der Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

165. Bestimmen Sie die Moore–Penrose–Inverse der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

166. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix, und sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A^*A + \alpha I$ invertierbar ist.

167. Zeigen Sie über die Charakterisierung durch die Singulärwertzerlegung, dass die Moore–Penrose–Inverse $A^\dagger$ einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ die Gleichung
$$A^\dagger = \lim_{\alpha\to 0^+} (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*$$
erfüllt.

168. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix der Gestalt $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, und sei $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch $\exp(At)$ eine Diagonalmatrix ist, und zwar von der Form $\exp(At) = \operatorname{diag}(e^{a_1 t}, \ldots, e^{a_n t})$.

169. Betrachten Sie die gewöhnliche lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0\,, \tag{1}$$

wobei $x\colon I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) die gesuchte (skalarwertige) Funktion ist. Diese Gleichung n-ter Ordnung kann man in ein äquivalentes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung für eine (vektorwertige) Funktion $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})\colon I \to \mathbb{K}^n$ umschreiben, indem man $u_0(t) = x(t)$, $u_1(t) = \dot{x}(t)$,..., $u_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ setzt.

Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ derart, dass die Differentialgleichung (1) äquivalent ist zur Gleichung

$$\dot{u} = Au\ .$$

170. Der *harmonische Oszillator* wird beschrieben durch die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$, wobei $\omega_0 > 0$ (rücktreibende Kraft) und $\beta \geq 0$ (Dämpfung). Schreibt man diese Gleichung mithilfe des in Beispiel 169 beschriebenen Verfahrens um, so erhält man die Gleichung

$$\dot{u}(t) = Au(t) \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix}\ .$$

Zeigen Sie, dass die Matrix A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\beta \neq \omega_0$. Bestimmen Sie für diesen generischen Fall die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Wie unterscheiden sich die Lösungen in den drei Fällen $\beta = 0$ (ungedämpfter Fall), $0 < \beta < \omega_0$ (schwach gedämpfter Fall) und $0 < \omega_0 < \beta$ (stark gedämpfter Fall) qualitativ? Betrachten Sie dabei insbesondere das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$ und zeigen Sie, dass im (nichttrivialen) stark gedämpften Fall die Funktion u maximal eine Nullstelle besitzt. Wie ändert sich die Frequenz der Schwingung, wenn sich im schwach gedämpften Fall die Dämpfung dem kritischen Fall $\beta = \omega_0$ annähert?