Lineare Algebra – Übungsteil 11

WS 2010/2011

M. Grasmair

Achtung: Am 27. Oktober entfallen die Übungen; der nächste Termin ist der 3. November.

143. Sei $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Die zu $\mathbf{a}$ gehörige *zyklische Matrix* ist die Matrix A mit den Einträgen

$$A_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i} & \text{falls } j \geq i, \\ a_{n+j-i} & \text{falls } j < i\ . \end{cases}$$

Es ist also

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & \dots & & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass die Eigenvektoren der zu $\mathbf{a}$ gehörigen zyklischen Matrix A genau die Vektoren $\mathbf{v}^k = (e^{2\pi i\, kl/n})_{l=0,\dots,n-1}$, $0 \leq k \leq n-1$, sind. Weiters ist der zu $\mathbf{v}^k$ gehörige Eigenwert gleich $\tilde{\mathbf{a}}_k$, also der k-te Eintrag der diskreten Fouriertransformierten des Vektors $\mathbf{a}$. Folgern Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann zyklisch ist, wenn ihre Eigenvektoren gleich $\mathbf{v}^k$, $0 \leq k \leq n-1$, sind.

144. Seien A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zyklische Matrizen. Zeigen Sie, dass AB wieder eine zyklische Matrix ist und dass $AB = BA$ gilt (d.h., zyklische Matrizen kommutieren).

145. Betrachten Sie nun speziell den Vektor $\mathbf{a} = (1 + 2\lambda, -\lambda, 0, 0, \dots, 0, -\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der zugehörigen zyklischen Matrix.

146. Das *explizite Eulerverfahren* zur Lösung des Gleichungssystems $\partial_t u = \partial_x^2 u$ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist definiert durch die Vorschrift

$$u_j^{\nu+1} = u_j^\nu + \frac{\tau}{h^2}\big(u_{j-1}^\nu - 2u_j^\nu + u_{j+1}^\nu\big)\ .$$

Formulieren Sie eine Bedingung, die die Zeitschrittweite τ (abhängig von h) erfüllen muss, damit diese Vorschrift ein stabiles Verfahren definiert. Schreiben Sie dazu die Iterationsvorschrift in der Form $\mathbf{u}^{\nu+1} = A\mathbf{u}^\nu$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und finden Sie eine Bedingung, die garantiert, dass alle Eigenwerte der Matrix A betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sind.

147. Das *implizite Eulerverfahren* zur Lösung des Gleichungssystems $\partial_t u = \partial_x^2 u$ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist definiert durch die Vorschrift

$$u_j^{\nu+1} = u_j^\nu + \frac{\tau}{h^2}\big(u_{j-1}^{\nu+1} - 2u_j^{\nu+1} + u_{j+1}^{\nu+1}\big)\ .$$

Zeigen Sie, dass diese Vorschrift unabhängig von der Wahl der Zeitschrittweite $\tau > 0$ ein stabiles Verfahren definiert. Gehen Sie dabei vor wie in Aufgabe 146.

148. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix gegeben durch

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j\ , \\ 1 & \text{falls } i \neq j\ . \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Inverse von A.

149. Betrachten Sie für $s \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \mu\, \partial_x^s u(t,x)\,, \qquad && x \in [0,2\pi),\ t > 0\,, \\ u(0,x) &= u_0(x)\,, && x \in [0,2\pi)\,, \end{aligned}$$

wobei $u_0\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist. Wie entwickeln sich die verschiedenen Fouriermoden der Funktion u_0 unter dieser Differentialgleichung? Betrachten Sie dazu zunächst den Fall, dass u_0 nur eine einzige nichttriviale Fouriermode besitzt, also dass $u_0(x) = e^{ikx}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, und lösen Sie die Differentialgleichung in diesem Spezialfall. Nehmen Sie anschließend (ohne Beweis!) an, dass die Fouriermoden sich unabhängig voneinander entwickeln (falls u_0 nur endlich viele nichttriviale Fouriermoden besitzt, folgt diese Annahme aus der Linearität der Differentialgleichung; im allgemeinen Fall gilt dies eigentlich nur, wenn man zusätzliche Bedingungen an den Koeffizienten μ und die Fourierkoeffizienten von u_0 stellt – und auch dann muss man möglicherweise den Begriff der Lösung einer Differentialgleichung verallgemeinern).