Lineare Algebra und Geometrie II, Übungen

Gruppe 1 ($9^{\underline{00}}$–$9^{\underline{45}}$)

1. *Sei*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$
Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$. Finden Sie weiters Vektoren u, $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\|_1 = 1$ und $\|Au\|_1 = \|A\|_1$, beziehungsweise $\|v\|_\infty = 1$ und $\|Av\|_\infty = \|A\|_\infty$.

Zunächst die Berechnung der Norm der Matrizen: Es gilt
$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}| = \max\{|1| + |1|, |2| + |-3|\} = 5$$
und
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}| = \max\{|1| + |2|, |1| + |-3|\} = 4 .$$
Um nun die Vektoren der Norm 1 zu finden, bei denen die Matrixnorm genau angenommen wird, betrachten wir die beiden Maxima, die wir berechnet haben, genauer. Im Fall der 1-Norm ist das Maximum gerade beim zweiten Term angenommen worden, der (bis auf die Absolutbeträge) der zweiten Spalte der Matrix A entspricht. Die zweite Spalte erhalten wir aber genau, indem wir die Matrix A mit dem zweiten Standardbasisvektor multiplizieren. Setzen wir also $u := e_2 = (0, 1)$. Dann ist
$$\|u\|_1 = |0| + |1| = 1 \qquad \text{und} \qquad \|Au\|_1 = |2| + |3| = 5 = \|A\|_1 .$$

Mit einer ähnlichen Argumentation kommen wir auch im Fall der ∞-Norm zum Ziel. Hier wird wieder das Maximum beim zweiten Term angenommen, der nun der zweiten Zeile von A entspricht. Die Zeilen von A erhalten wir beispielsweise, indem wir die Matrix A mit dem Vektor $w = (1, 1)$ multiplizieren (dessen Maximumsnorm genau gleich 1 ist). Dies führt noch nicht zum richtigen Ergebnis, weil
$$Aw = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
und damit $\|Aw\|_\infty = 3 < \|A\|_\infty = 4$ ist. Allerdings sehen wir, dass wir den Eintrag 4 erhalten würden, wenn wir im zweiten Eintrag von Aw das Vorzeichen bei -3 wechseln können. Dies erreichen wir aber, wenn wir das Vorzeichen im zweiten Eintrag des Vektors w ändern. Setzen wir also $v := (1, -1)$. Dann ist
$$\|v\|_\infty = \max\{|1|, |-1|\} = 1$$
und
$$\|Av\|_\infty = \max\{|1 - 2|, |1 + 3|\} = 4 = \|A\|_\infty .$$

2. *Bestimmen Sie sowohl eine Jordanzerlegung als auch eine Singulärwertzerlegung der Matrix*

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie weiters eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Als erstes betrachten wir die Jordanzerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Das heißt, wir suchen eine Matrix J und eine invertierbare Matrix V, sodass $A = VJV^{-1}$. Dabei soll J entweder die Gestalt $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ oder $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ haben.

Als erstes müssen wir also die Eigenwerte von A finden, die gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind. Selbiges läßt sich einfach berechnen: Es ist

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \\ = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) . \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind offensichtlich gleich $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$. Damit haben wir zwei unterschiedliche Eigenvektoren. Die Matrix A ist also diagonalisierbar und es gilt

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Nun müssen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von A finden, also Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v^{(1)} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v^{(2)} = -2v^{(2)} .$$

Ein Kandidat für den ersten Eigenvektor ist $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, für den zweiten Eigenvektor bietet sich $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Die Matrix V setzt man nun aus den beiden Eigenvektoren zusammen, also

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A = VJV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Nun bestimmen wir die Singulärwertzerlegung von A. Dazu brauchen wir unitäre Matrizen P und Q sowie eine Diagonalmatrix S mit nichtnegativen, der Größe nach geordneten Einträgen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$, sodass $A = PSQ^*$. Dabei sind σ_1 und σ_2 genau die Singulärwerte von A, also die positiven Wurzeln Eigenwerte der Matrix A^*A. Weiters sind die Spalten von Q die normierten Eigenvektoren von A^*A zu den entsprechenden Eigenwerten σ_i^2.

In diesem Beispiel ist A eine selbstadjungierte Matrix und damit $A^*A = A^2$. Die Eigenwerte von A^2 sind also die Quadrate der Eigenwerte von A, die wir ja bereits berechnet haben. Die Singulärwerte sind deren positive Wurzeln, also gerade die Absolutbeträge der Eigenwerte von A. Wir haben also $\sigma_1 = 2$ und $\sigma_2 = 0$. Die Eigenvektoren von A^2 sind ident mit den Eigenvektoren von A — hier müssen wir allerdings beachten, dass wir die Eigenwerte von A oben anders angeordnet haben. Es ist also $\tilde{q}^{(1)} = v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\tilde{q}^{(2)} = v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Um die beiden Vektoren zu normieren, müssen wir sie jeweils durch ihren (euklidischen!) Absolutbetrag dividieren. Damit erhalten wir

$$q^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um die Matrix P zu bestimmen, verwenden wir, dass

$$A = PSQ^* \qquad \text{und damit} \qquad PS = AQ\,,$$

weil Q invertierbar ist. Daraus folgt, dass die Spalten $p^{(i)}$ der Matrix P die Gleichungen

$$\sigma_i p^{(i)} = Aq^{(i)} \tag{1}$$

erfüllen. Insbesondere ist also

$$p^{(1)} = \frac{1}{\sigma_1} Aq^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $p^{(2)}$ hilft die Relation (1) nicht weiter, weil ja $\sigma_2 = 0$ ist. Da aber die einzigen Bedingungen an P sind, dass (1) gilt und P unitär ist, genügt es, irgendeinen normierten Vektor zu finden, der auf $p^{(1)}$ orthogonal steht, etwa $p^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A = PSQ^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Singulärwertzergung der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gehen wir analog vor. Zunächst berechnen wir

$$B^*B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix hat offensichtlich den doppelten Eigenwert 5, also ist

$$S = \sqrt{5}I = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Als (orthogonale und normierte) Eigenvektoren können wir beispielsweise die beiden Standardbasisvektoren wählen. Damit ist also

$$Q = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und aus der Gleichung $PS = BQ$ erhalten wir, dass $\sqrt{5}P = B$, beziehungsweise

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Also haben wir die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B = PSQ^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrix*

$$M := \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$$

genau gleich $\pm\sigma_1, \pm\sigma_2, \ldots, \pm\sigma_n$ sind.

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix M ähnlich der Matrix*

$$N := \begin{pmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei S die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ist.

Sei $A = PSQ^*$ die Singulärwertzerlegung der Matrix A. Definiere nun $V := \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Dann ist

$$V^*V = \begin{pmatrix} P^* & 0 \\ 0 & Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^*P & 0 \\ 0 & Q^*Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} ,$$

woraus folgt, dass V unitär ist, also $V^* = V^{-1}$. Nun ist

$$\begin{aligned} V^*MV = \begin{pmatrix} P^* & 0 \\ 0 & Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & P^*AQ \\ Q^*AP & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ S^* & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Weil S eine Diagonalmatrix mit reellen (sogar nichtnegativen) Einträgen ist, gilt $S = S^*$. Damit haben wir aber gezeigt, dass M und N ähnliche Matrizen sind. Insbesondere sind also die Eigenwerte von M ident denen von N.

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Eigenwerte von N genau $\pm\sigma_i$, $1 \leq i \leq n$, sind. Die einfachste Möglichkeit, dies zu zeigen, ist, die entsprechenden Eigenvektoren zu finden. Dazu beobachten wir, dass

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \sigma_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_n \\ \hline \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_n & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \cdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 b_1 \\ \vdots \\ \sigma_n b_n \\ \cdots \\ \sigma_1 a_1 \\ \vdots \\ \sigma_n a_n \end{pmatrix} .$$

Insbesondere sehen wir also, dass der Vektor $(e_i + e_{i+n})$ mit $1 \leq i \leq n$ auf $\sigma_i(e_i + e_{i+n})$ und der Vektor $(e_i - e_{i+n})$ auf $\sigma_i(-e_i + e_{i+n}) = -\sigma_i(e_i - e_{i+n})$ abgebildet wird. Also ist für $1 \leq i \leq n$ der Vektor $e_i + e_{i+n}$ Eigenvektor zum Eigenwert σ_i und der Vektor $e_i - e_{i+n}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-\sigma_i$.

Eine andere Möglichkeit ist, die Matrix

$$T := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$$

zu betrachten. Dies ist eine unitäre, selbstadjungierte Matrix; es gilt also $T^{-1} = T^* = T$. Weiters ist

$$\begin{aligned} TNT^{-1} = TNT &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S & S \\ -S & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix} =: L . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix L sind offensichtlich genau die Diagonaleinträge $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und $-\sigma_1, \ldots, -\sigma_n$. Außerdem ist L nach Konstruktion ähnlich der Matrix M, woraus folgt, dass M genau dieselben Eigenwerte besitzt.

Gruppe 2 ($12^{\underline{00}}$–$12^{\underline{45}}$)

1. *Bestimmen Sie sowohl eine Jordanzerlegung als auch eine Singulärwertzerlegung der Matrix*
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$
Bestimmen Sie weiters eine Singulärwertzerlegung der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Vorgangsweise für die Bestimmung der Jordan- und Singulärwertzerlegung der ersten Matrix ist gleich wie beim entsprechenden Beispiel der ersten Gruppe. Für die zweite Matrix empfiehlt es sich allerdings, einen etwas anderen Weg zu nehmen.

Betrachten wir also die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hier müssen wir $P \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $S \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ finden, sodass P und Q unitär sind, S die Form $S = (\sigma_1, 0, 0)$ hat und die Gleichung $A = PSQ^*$ gilt. Um den Singulärwert von A zu bestimmen, berechnen wir die Matrix $AA^* = (9) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Also besitzt A den Singulärwert $\sigma_1 = 3$. Die 1×1-Matrix P ist unitär, also können wir entweder $P = (1)$ oder $P = (-1)$ setzen. Der Einfachheit halber bietet sich $P := (1)$ an. Schließlich müssen wir noch eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ finden, sodaß $A = PSQ^*$, beziehungsweise $QS^* = A^*P$. Nun ist aber

$$QS^* = \begin{pmatrix} q^{(1)} & q^{(2)} & q^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3q^{(1)}$$

und

$$A^*P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A^* .$$

Also ist $q^{(1)} = A^*/3$. Den Rest der Matrix Q erhalten wir, indem wir den Vektor $q^{(1)}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Möglich ist beispielsweise

$$q^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A = PSQ^* = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

2. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$. Finden Sie weiters Vektoren u, $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\|_1 = 1$ und $\|Au\|_1 = \|A\|_1$, beziehungsweise $\|v\|_\infty = 1$ und $\|Av\|_\infty = \|A\|_\infty$.

Diese Aufgabe ist ganz analog zur Aufgabe 1 der ersten Gruppe. Als Lösung erhält man

$$\|A\|_1 = 5 , \qquad u = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \|A\|_\infty = 5 , \qquad v = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

3. *Sei $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie zunächst die Gleichheit $\|I\| = 1$. Sei nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|A\| < 1$. Zeigen Sie, dass $I - A$ invertierbar ist und die Abschätzung*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

gilt.

Im folgenden nehmen wir an, dass die Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ durch $|\cdot|$ induziert ist, wobei $|\cdot|$ eine nicht näher spezifizierte Norm auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Es gilt also

$$\|A\| = \max\big\{|Ax| : x \in \mathbb{C}^n,\ |x| \leq 1\big\}\ .$$

Weiters wissen wir, dass induzierte Normen verträglich sind, also die Abschätzung

$$|Ax| \leq \|A\|\,|x| \qquad \text{für } A \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ und } x \in \mathbb{C}^n \tag{2}$$

gilt.

Zunächst beobachten wir, dass

$$\|I\| = \max\big\{|Ix| : x \in \mathbb{C}^n,\ |x| \leq 1\big\} = \max\big\{|x| : x \in \mathbb{C}^n,\ |x| \leq 1\big\} = 1\ .$$

Verwenden wir nun die umgekehrte Dreiecksungleichung und (2), so sehen wir, dass

$$|(I - A)x| \geq |Ix| - |Ax| \geq |x| - \|A\||x| = (1 - \|A\|)|x|$$

für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Wegen $(1 - \|A\|) > 0$ folgt daraus, dass $|(I - A)x| > 0$ sofern $|x| > 0$. Weil $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ ist, impliziert dies wiederum, dass

$$|(I - A)x| > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\ .$$

In anderen Worten: die Abbildung $(I - A)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist injektiv. Wir wissen aber, dass eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension genau dann injektiv ist, wenn sie bijektiv ist. Also haben wir gezeigt, dass $(I - A)$ eine invertierbare Abbildung ist.

Um schließlich die Abschätzung für die Norm von $(I - A)^{-1}$ zu zeigen, verwenden wir, dass

$$\begin{aligned}
\|(I - A)^{-1}\| &= \|I(I - A)^{-1}\| \\
&= \|(I - A + A)(I - A)^{-1}\| \\
&= \|(I - A)(I - A)^{-1} + A(I - A)^{-1}\| \\
&= \|I + A(I - A)^{-1}\| \\
&\leq \|I\| + \|A(I - A)^{-1}\| \\
&= 1 + \|A(I - A)^{-1}\| \\
&\leq 1 + \|A\|\|(I - A)^{-1}\|\ .
\end{aligned} \tag{3}$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus (2) wegen

$$\begin{aligned}\|BC\| &= \max\bigl\{|BCx| : x \in \mathbb{C}^n,\ |x| \le 1\bigr\}\\ &\le \max\bigl\{\|B\||Cx| : x \in \mathbb{C}^n,\ |x| \le 1\bigr\} = \|B\|\|C\|\ .\end{aligned}$$

Aus (3) folgt nun, dass

$$(1 - \|A\|)\,\|(I - A)^{-1}\| \le 1\,,$$

was aufgrund der Annahme $\|A\| < 1$ äquivalent zur gesuchten Abschätzung ist.

Eine Alternative ist es, die Matrizen

$$B_k := \sum_{j=0}^{k} A^j$$

zu betrachten. Zunächst impliziert die Summationsformel für geometrische Reihen, die anwendbar ist, weil $\|A\| < 1$, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \|A\|^j = \frac{1}{1 - \|A\|}\ . \tag{4}$$

Insbesondere ist die Reihe $B_k = \sum_{j=0}^{k} A^j$ also absolut konvergent, woraus folgt, dass der Limes $B := \lim_{k\to\infty} B_k$ existiert. Nun gilt, dass

$$\begin{aligned}(I - A)B &= (I - A)\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k} A^j\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k} A^j - \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k} AA^j\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k} A^j - \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} A^j\\ &= I + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} A^j - \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k} A^j\\ &= I\ .\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $B(I - A) = I$. Also ist $(I - A)$ invertierbar, und es gilt $(I - A)^{-1} = B$. Nun folgt aus der Stetigkeit der Norm, der Dreiecksungleichung, und den Abschätzungen (3) und (4), dass

$$\begin{aligned}\|B\| = \lim_{k\to\infty}\|B_k\| = \lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{j=0}^{k} A^j\right\| &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\|A^j\|\\ &\le \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\|A\|^j = \frac{1}{1 - \|A\|}\ .\end{aligned}$$