UNIVERSITÄT WIEN
FORSCHUNGSGRUPPE DATA ANALYTICS AND COMPUTING

Grundlagen der Mathematik und Analysis 50009/1-4

Übungsblatt 8

Mehrdimensionale Analysis – Mehrfachintegrale

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Inhalte folgender beschränkter Mengen des $\mathbb{R}^3$ (Skizze!):

a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq x_1, 0 \leq x_3 \leq x_1 x_2\}$

b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq \min(x_1, x_2)\}$

c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) | 0 \leq x_1 \leq h, |x_2| \leq a x_1, |x_3| \leq a x_1\}; a, h \in \mathbb{R}, a > 0, h > 0$

Aufgabe 2

Berechnen Sie $\int_B f(x)dx$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Angaben:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, B = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq x_1\}$

b) $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, B = \{1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2\}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie $\int_B f(x)dx$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit folgender Angabe:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3, B = \{0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 0 \leq x_2 + x_3 \leq 1\}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie $\int_B f(x)dx$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Angaben:

a) $f(x_1, x_2) = e^{-x_1 x_2}, B = \{-2 \leq x_1 \leq -1, x_1 x_2 \geq 1\}$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1 - x_2 - x_3}, B = \{0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3\}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Integral der Funktion f über dem angegebenen Bereich:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1, B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie das Integral der Funktion f über dem angegebenen Bereich sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten:

$$f(x_1, x_2) = |x_1 x_2|, B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Integral über dem angegebenen Bereich:

$$\int_B \sqrt{x^2 + y^2} dxdy, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Volumen zwischen den beiden Flächen

$$f(x, y) = 0.9(x^2 + y^2) + 0.1, g(x, y) = x^2 + y^2$$

auf dem Integrationsbereich

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | \begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right\}.$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral über den Bereich B, der durch $x + y = 1, x = 0, y = 0$ begrenzt wird:

$$\iint \cos \frac{x - y}{x + y} dxdy$$

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $u = x - y, v = x + y$

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Volumen des Gebietes R oberhalb der xy-Ebene, welches durch das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und den Zylinder $x^2 + y^2 = a^2$ begrenzt wird.

Verwenden Sie Zylinderkoordinaten:

$$(r, \varphi, z), x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z, V = \iiint_R dxdydz = \iiint_{R'} r dr d\varphi dz$$

Die Gleichung des Paraboloids lautet dann $z = r^2$, die des Zylinders $r = a$.

Aufgabe 11

Berechnen Sie das Volumen des Gebietes R, welches nach oben durch die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ und nach unten durch den Kegel $z^2 \sin^2 \alpha = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha$ begrenzt wird. α gibt hierbei den Winkel zwischen positiver z-Achse und Erzeugender an, wobei die Spitze des Kegels im Ursprung liegt.

Verwenden Sie Kugelkoordinaten:

$$(r, \theta, \varphi), x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r \cos\theta$$

$$V = \iiint_R dxdydz = \iiint_{R'} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$

Der Radius r ist der Abstand des Punktes vom Ursprung, also die Länge des Vektors $\boldsymbol{r}$, der Polarwinkel θ ist der Winkel zwischen positiver z-Achse und $\boldsymbol{r}$, und der Azimutwinkel φ ist der Winkel zwischen positiver x-Achse und $\boldsymbol{r}_{xy}$, der Projektion von $\boldsymbol{r}$ in die xy-Ebene.

Die Gleichung der Kugelfläche vereinfacht sich somit zu $r = a$ und die des Kegelmantels zu $\theta = \alpha$.

Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis das Volumen einer Kugel her.

Es ist weiters der Schwerpunkt des Gebietes R gesucht:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = \frac{M_{xy}}{V}, M_{xy} = \iiint_{R'} zr^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$

Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis den Schwerpunkt einer Halbkugel her.