UNIVERSITÄT WIEN
FORSCHUNGSGRUPPE DATA ANALYTICS AND COMPUTING

Grundlagen der Mathematik und Analysis 50009/1-4

Übungsblatt 7

Mehrdimensionale Analysis – Optimierung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden quadratischen Formen $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und geben Sie mit Hilfe der Hesse'schen Matrix an, ob Minima oder Maxima vorliegen.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^t\boldsymbol{x}$, $A = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und geben Sie mit Hilfe der Hesse'schen Matrix an, ob Minima oder Maxima vorliegen.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extrema und Sattelpunkte:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2, D_f = \mathbb{R}^2$

b) $f(x, y) = x^2 - y^2, D_f = \mathbb{R}^2$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = y^3 + 2x^2y - x^2 - 3y^2 + 1$ auf Extrema und Sattelpunkte.

Aufgabe 6

Finden Sie mittels Lagrange-Funktion die Extrema der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung NB:

$$f(x, y) = x + y^2, \mathrm{NB} : 2x^2 + y^2 = 1$$

Aufgabe 7

Finden Sie mittels Lagrange-Funktion die Extrema der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung:

$$f(x, y) = 4x + 3y, \mathrm{NB} : x^2 + y^2 = 1$$

Aufgabe 8

Finden Sie mittels Lagrange-Funktion die Extrema der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \mathrm{NB} : 2xy = 1$$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Extrema der folgenden Funktion unter der angegebenen Nebenbedingung sowohl mittels Substitutionsmethode als auch mittels Lagrange-Funktion:

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, D_f = \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)^t, \mathrm{NB} : x + y = 2$$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie mittels Lagrange-Funktion unter allen Zylindern mit gleicher Oberfläche jenen mit größtem Volumen.

Aufgabe 11

Aus vier gleich langen Stangen der Länge s soll eine Zeltpyramide mit quadratischer Grundfläche und möglichst großem Volumen errichtet werden. Bestimmen Sie das maximale Volumen sowohl mittels Substitutionsmethode als auch mittels Lagrange-Funktion.

Aufgabe 12

Bestimmen Sie mittels Lagrange-Funktion unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfang jenes mit der größten Fläche. Hinweis: Der Satz des Heron besagt, dass die Fläche eines Dreiecks sich wie folgt berechnet: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wobei s der halbe Umfang ist.

Aufgabe 13

Gesucht ist das Volumen des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten innerhalb des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Aufgabe 14

Berechnen Sie das maximale Volumen eines Quaders mit einer Oberfläche von $10\mathrm{m}^2$.

Aufgabe 15

Bestimmen Sie jenen Punkt auf dem Paraboloid $x^2+y^2 = 2z+9$, der vom Punkt $P(4,6,1)$ den geringsten Abstand hat.