UNIVERSITÄT WIEN
FORSCHUNGSGRUPPE DATA ANALYTICS AND COMPUTING

**Grundlagen der Mathematik und Analysis 50009/1-4**

# Übungsblatt 6

# Mehrdimensionale Analysis – Partielle Ableitungen

### Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D_f$

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert (Hinweis: Nähern Sie sich dem Ursprung auf einer Geraden $g : y = kx$)

c) Zeichnen Sie die Niveaumenge $N_f(0) = \{(x,y)|f(x,y) = 0\}$

d) Zeichnen Sie die Funktion $f(x,y)$ mittels wxMaxima

e) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen an der Stelle $(1|2)$

### Aufgabe 2

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und bilden Sie den Gradientenvektor:

a) $f(x,y) = \cos(xy)$

b) $f(x,y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

d) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^{(x_2+x_3)}$

### Aufgabe 3

Berechnen Sie die Jacobimatrix $\nabla f$ von $f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1x_2x_3} \\ \sin(x_1x_2x_3) \end{pmatrix}$.

### Aufgabe 4

Berechnen Sie den Gradientenvektor und die Hesse'sche Matrix:

a) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $f(x_1,x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + 2x_1x_2$

c) $f(x_1,x_2) = e^{x_1^2+x_2^2}$

d) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 + 3x_2 - x_3^2$

## Aufgabe 5

Finden Sie die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^2yz + 4xz^2$ im Punkt $(1,-2,-1)$ in Richtung $(2,-1,-2)$.

## Aufgabe 6

Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^2yz^3$ längs der Kurve

$$r(u) = \begin{pmatrix} e^{-u} \\ 2\sin u + 1 \\ u - \cos u \end{pmatrix}$$

im Punkt $P$, in dem $u = 0$ ist. Wie groß ist die maximale Richtungsableitung in $P$?

## Aufgabe 7

Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene von $f(x,y) = x^2y^3$ im Punkt $P(1|-1)$ auf.

## Aufgabe 8

Die Gleichung einer Fläche $F$ lautet $x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$.

a) Wie lautet die Gleichung der Normalen im Punkt $(1,2,-1)$?

b) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1,2,-1)$? Hinweis: Gleichung der Tangentialebene: $\nabla F(x_0)(x - x_0) = 0$.

## Aufgabe 9

Es sei folgendes Vektorfeld gegeben:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} x^2z \\ -2y^3z^2 \\ xy^2z \end{pmatrix}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{V}$ ist definiert als das skalare Produkt des Nabla-Operators mit $\mathbf{V}$: $\mathrm{div}\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}$. Bestimmen Sie $\mathrm{div}\mathbf{V}$ im Punkt $(1,-1,1)$.

## Aufgabe 10

Es sei folgendes Vektorfeld gegeben:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} xz^3 \\ -2x^2yz \\ 2yz^4 \end{pmatrix}$$

Die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{V}$ ist definiert als das vektorielle Produkt des Nabla-Operators mit $\mathbf{V}$: $\mathrm{rot}\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$. Bestimmen Sie $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ im Punkt $(1,-1,1)$.

**Aufgabe 11**

Bilden Sie das vollständige Differential nachstehender Funktionen:

a) $f(x, y) = x^2 y$

b) $f(x, y) = e^{x/y}$

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Aufgabe 12**

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts ergibt sich aus $A = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$ für $\alpha$ im Bogenmaß. Wie groß ist der maximale Fehler von $A$, wenn $r = (8.2 \pm 0.05)$cm und $\alpha = (126 \pm 1)^\circ$ gemessen wurden.