UNIVERSITÄT WIEN
FORSCHUNGSGRUPPE DATA ANALYTICS AND COMPUTING

Grundlagen der Mathematik und Analysis 50009/1-4

Übungsblatt 5

Eindimensionale Analysis – Bestimmte Integrale

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionen f und g im Intervall zwischen den reellwertigen Schnittpunkten beider Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 4, g(x) = 2x^2$

b) $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionen f und g im Intervall zwischen den reellwertigen Schnittpunkten beider Funktionen:

a) $f(x) = 4x, g(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = \log x, g(x) = (\log x)^2$

Aufgabe 3

Dreht man eine Kurve mit $y = f(x)$ um die x-Achse, so beträgt das Volumen des entstehenden Drehkörpers:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Die Kurve mit $y = \cosh x$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers zwischen $a = 0$ und $b = 2$.

Aufgabe 4

Dreht man eine Kurve mit $y = f(x)$ um die y-Achse, so beträgt das Volumen des entstehenden Drehkörpers:

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$$

Die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers zwischen $y_1 = -c$ und $y_2 = c$.

Aufgabe 5

Die Bogenlänge s eines Stücks der Kurve mit $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ ergibt sich aus:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Berechnen Sie den Umfang der gleichseitigen Astroide, deren Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$ lautet.

Aufgabe 6

Dreht man eine Kurve mit $y = f(x)$ um die x-Achse, so ist die Mantelfläche des entstehenden Drehkörpers:

$$M = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Eine kubische Parabel mit $y = x^3$ rotiert um die x-Achse. Wie groß ist die Mantelfläche für $a = 0$ und $b = 1$?

Aufgabe 7

Die Flächenschwerpunktskoordinaten x_0, y_0 einer Fläche A ergeben sich aus den statischen Momenten M_y, M_x:

$$A = \int_a^b y dx, M_y = \int_a^b xy dx, M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, x_0 = \frac{M_y}{A}, y_0 = \frac{M_x}{A}$$

Berechnen Sie die Flächenschwerpunktskoordinaten für einen Halbkreis mit $M(0|0)$ und $y \geq 0$.