UNIVERSITÄT WIEN
FORSCHUNGSGRUPPE DATA ANALYTICS AND COMPUTING

Grundlagen der Mathematik und Analysis 50009/1-4

Übungsblatt 2

Eindimensionale Analysis – Differentialrechnung

Aufgabe 1

Differenzieren Sie folgende rationale Funktion:

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Aufgabe 2

Differenzieren Sie folgende Wurzelfunktionen:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Aufgabe 3

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \sin x \cos x$

b) $f(x) = \sin^2 x$

c) $f(x) = \sin x^2$

d) $f(x) = \tan x \sin x$

Aufgabe 4

Differenzieren Sie folgende Funktionen:

a) $f(x) = \arctan \sqrt{x}$

b) $f(x) = \arccos e^x$

Aufgabe 5

Diskutieren Sie die folgende Funktion (Nullstellen, Extrema, Monotonie, Wendepunkte, Krümmungsverhalten, Konvergenz und Skizze): $f(x) = x^3 - 3x$.

Aufgabe 6

Berechnen Sie y' durch implizite Differentiation:

a) $x^2 + y^2 - r^2 = 0, r \in \mathbb{R}$

b) $e^{xy} = 2$

c) $xy - \log y = 2$

d) $yx^2 - e^y = 0$

Aufgabe 7

Ermitteln Sie y' durch Logarithmieren und anschließendes Ableiten:

a) $y = \sqrt[x]{x}$

b) $y = (\sin x)^{\cos x}$

c) $y = \sqrt[5]{\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-3}}$

Aufgabe 8

Berechnen Sie im Punkt $P_0(1|y_0)$ die Krümmung der Kurve $y = x^3$. Hinweis: die Krümmung κ einer Kurve ist definiert als $\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt im Punkt $P_0(1|y_0)$ der Kurve $y = \sqrt{x}$. Hinweis: der Krümmungsradius $\rho = \frac{1}{\kappa}$, die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes $M(x_M|y_M) : x_M = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), y_M = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$.

Aufgabe 10

Wo ist die Kurve $y = \log x$ am stärksten gekrümmt? Hinweis: Bestimmen Sie die Krümmung κ, substituieren Sie $z = 1/x^2$ und finden Sie das Maximum für κ^2.

Aufgabe 11

Es sei $f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \|\frac{df(t)}{dt}\|, \|\frac{d^2f(t)}{dt^2}\|$.

Aufgabe 12

Ein Teilchen bewegt sich auf einer Kurve mit der Parametergleichung $f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2\cos 3t \\ 2\sin 3t \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

b) Geben Sie die Größe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung für $t = 0$ an.

Aufgabe 13

Es sei folgende Raumkurve **R** gegeben (Schraubenlinie): $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie:

a) die Einheitstangente (normiert auf die Bogenlänge s) $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{\|d\mathbf{R}/dt\|}$

b) die Krümmung $\kappa = \|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\|$

c) die Hauptnormale $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$

d) die Binormale $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$

e) die Torsion τ, diese ergibt sich aus $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$