Bsp 1

a)

- Sei $\varepsilon > 0$. x_n CF $\Rightarrow$ k_1 sd für $\forall$ $m, n > k_1$

$\|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

- weil $x_{n(i)} \to x_\infty$ TF von CF $\Rightarrow$ k_2 sd $\forall i > k_2$

$\|x_{n(i)} - x_\infty\| < \varepsilon/2$.

- Sei $k = \max(k_1, k_2)$, weil $n(i) \geq i$ $\forall i$

$\Rightarrow \|x_{n(k)} - x_\infty\| < \varepsilon/2$

- Für beliebiges $n > k$ $\Rightarrow$

$$\|x_n - x_\infty\| \leq \|x_n - x_{n(k)}\| + \|x_{n(k)} - x_\infty\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \square$$

b)

Angenommen nicht $\forall$ TF haben TF ~~mit~~ die gegen x_∞ konvergiert

$\Rightarrow$ ~~$\exists k$~~ $\exists \varepsilon > 0$, sd $\forall k$ $\exists$

Bsp 2

X NR vollständig $\iff \forall \sum \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \not< \infty$ in X

$(\Rightarrow)$

Sei X vollständig und | x_n absolut summierbare Folge $\sum \|x_n\| < \infty$

Sei $Y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ und $M > N$.

$\Rightarrow \|Y_N - Y_M\| = \|\sum_{n=N}^{M} x_n\| \overset{DU}{\leq} \sum_{n=N}^{M} \|x_n\| \leq \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \|x_n\|}_{\text{Weil Rest einer abs summ Reihe.}} \to 0$

$\Rightarrow Y_N$ ist CF $\Rightarrow \sum x_n$ konvergiert ~~bzw~~

=

$(\Leftarrow)$

Es gilt für $\forall \sum \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum x_n < \infty$

.) Sei x_n CF, wegen Bsp 1 nehmen wir Teilfolge.

mit n_0, sd $n, m > n_0$ und $\|x_m - x_n\| \leq 2^0$

.) Für $k > 0$ und $n_k > n_{k-1}$ ist dann $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$.

für $n, m > n_k$.

Sei nun

$$y_k = x_{n_0} + \sum_{i=1}^{k} (x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \| x_{n_i} - x_{n_{i-1}} \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

$\Rightarrow$ (*) konvergiert und $y_k \to X$.

Weil $y_k = x_{n_k}$ eine TF von CF ist und konvergiert gilt (Bsp 1) $x_n \to x$

$\Rightarrow$ X vollständig.

Bsp 3

ℓ^∞ nicht separabel.

•) Sei $Y = \{ x \in \ell^\infty \mid x(i) = 0 \text{ oder } 1, \ i = 1, \dots \}$

$y = (\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n, \dots) \in Y$

(Y ist Raum der Binärzahlen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta_i}{2^i} \in [0,1]$)

•) Es gilt $\underset{x \neq y}{x, y \in Y} \Rightarrow \|x - y\|_\infty = 1$. Abstand immer 1!

~~Und~~ überabzählbar viele Elemente ~~weil [0,1] überabzählbar~~

in Y also Folgen mit 1 oder 0

•) Jedes Element in Y überdecken mit $B_{1/4}(x)$. für $\forall x \in Y$

~~Dies z.B.~~ Es gilt für $\forall x_1, x_2 \in Y$, $x_1 \neq x_2$: $B_{1/4}(x_1) \cap B_{1/4}(x_2) = \emptyset$

~~...~~ und es gibt überabzählbar viele dieser Bälle.

•) Sei M dichte Menge in l^∞ (Angenommen).

Jeder Ball muß ein Element von M enthalten

Es gibt überabzählbar viele dieser ~~Bä~~ Umgebungen.

$\Rightarrow$ M kann nicht abzählbar sein.

$\Rightarrow$ ~~dM~~ weil M beliebig ~~kann~~ hat l^∞ keine dichten ~~Lei~~ Teilmengen die abzählbar sind

$\Rightarrow$ l^∞ nicht seperabel.

Bsp4 $\quad C_b([0,\infty])$, $f \in C_b([0,\infty])$. $\quad a > 0$.

$$\|f\|_a = \left(\int_0^\infty e^{-ax} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

a) $\|\cdot\|_a$ ist Norm auf $C_b([0,\infty])$.

i). $f \in C_b([0,\infty])$. $\Rightarrow |f(x)| < M \quad \forall x \in [0,\infty)$.

Weil $\quad 0 \leq e^{-ax} |f(x)|^2 \leq M^2 e^{-ax}$.

und $\quad \int_0^\infty e^{-ax} M^2 dx = \frac{M^2}{a}$

comp test improper int $\Rightarrow$ $\int_0^\infty e^{-ax} |f(x)|^2 dx \leq \frac{M^2}{a}$. $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_a$ ist wohldefiniert

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_a = \left(\int_0^\infty e^{-ax} |\alpha f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = |\alpha| \|f\|_a.$$

Wenn $\|f\|_a \Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-ax} |f(x)|^2 dx = 0$

$e^{-ax} > 0$ f stetig $\Leftrightarrow$ $|f(x)| = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$

iii). $f, g \in C_b([0,\infty))$.

Cauchy Schwarz

$$\left(\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, e^{-ax}\, dx\right)^2 \leq \int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-ax}\, dx \int_0^\infty |g(x)|^2 e^{-ax}\, dx$$

Als Minimum von $\varphi(t) = \int_0^\infty |t f(x) + g(x)|^2 e^{-ax}\, dx$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$

$$\|f+g\|_a^2 = \|f\|_a^2 + 2\int_0^\infty f(x)\, g(x)\, e^{-ax}\, dx + \|g\|_a^2$$

$$\leq \|f\|_a^2 + 2\|f\|_a \|g\|_a + \|g\|_a^2$$

$$= (\|f\|_a + \|g\|_a)^2.$$

$\Rightarrow \quad \|f+g\|_a \leq \|f\|_a + \|g\|_a \quad \forall f, g \in C_b([0,\infty))$

b) $a > b > 0$

Weil $\quad e^{-ax} \leq e^{-bx}$

$\Rightarrow \quad \int e^{-ax} |f(x)|^2 dx \leq \int e^{-bx} |f(x)|^2 dx.$

$\Rightarrow \quad \|f\|_a \leq \|f\|_b$. $\qquad \|\cdot\|_b$ ist stärkere Norm.

Angenommen ~~wir können~~ es gibt ein $c>0$ sd

$$\|f\|_b \leq c\, \|f\|_a .$$

•) Sei folgende Funktionenfolge.

$$e_n(x) = \begin{cases} n(x-n+\frac{1}{n}) & x \in [n-1/n, n] \\ 1 & x \in [n, n+1] \\ -n(x-n-1-1/n) & x \in (n+1, n+1+1/n] . \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

•) $\{e_n\} \subset BC([0,\infty))$ und $0 \leq e_n \leq 1$ und $e_n = 0$ auf $[0,\infty) \setminus [n-1/n, n+1+1/n]$.

•) Sei

$$f_n(x) = \sqrt{e^{bx}\, e_n(x)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. ~~dann~~ ist $f_n \in C_b([0,\infty))$

•) $$\|f_n\|_a^2 = \int_{n-1/n}^{n+1+1/n} e^{-ax} |f_n(x)|^2 dx.$$

$$= \int_n^{n+1} e^{(b-a)x} dx + \int_{n-1/n}^{n} e^{-ax} n(x-n+1/n)\, dx$$

$$- \int_{n+1}^{n+1+1/n} e^{-ax} n(x-n-1-1/n)\, dx .$$

$$\leq \frac{e^{(b-a)(n+1)} - e^{(b-a)n}}{b-a} + \frac{e^{-an}}{2n} + \frac{e^{-a(n+1)}}{2n} .$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_a = 0$$

Weil $\|f_n\|_b \leq c\,\|f_n\|_a$

Es gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_b = 0$

Aber,

$$\|f_n\|_b^2 = \int_{n-1/n}^{n+1+1/n} e^{-bx}\,|f_n(x)|^2\,dx.$$

$$= \int_n^{n+1} dx + \int_{n-1/n}^{n} n(x-n+1/n)\,dx - \int_{n+1}^{n+1+1/n} n(x-n-1-1)\,dx$$

$$= 1 + 1/n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_b^2 = 1$$

$\lightning$ zu $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_b = 0$

$\Rightarrow \nexists\, c > 0$, sd $\|f\|_b \leq c\,\|f\|_a \quad \forall f \in C_0([0,\infty])$

$\Rightarrow \|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ nicht äquivalent.