Bsp 1

Gram - Schmidt:

$$P_0(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ 1$$

$$P_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\ x$$

$$P_2(x) = \sqrt{5/2}\ \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \sqrt{\tfrac{7}{2}} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

$\overline{\|L_n\|^2}$

$\vdots$

Es gilt:

$$P_n(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}}_{**} \underbrace{\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n}_{L_n(x)} \quad (*) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:

i) Gram - Schmidt - Ortho liefert im n-ten Schritt reelles Polynom vom Grad $n \geq 0$

$\Rightarrow$ ON System eindeutig bestimmt

(ii) Es genügt zu zeigen, daß jedes $P_n(x)$ sich wie (*) darstellen lässt.

a) $(x^2-1)^n$ ist Poly mit Grad $2n$ $\Rightarrow \left(\frac{d}{dx}\right)^n$ ergibt Polynom vom Grad n mit positivem Leitkoeffizient

b) $\int L_n(x) L_m(x) = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$ ergibt Normalisierung

Weiters gilt:

$$\langle P_n, P_m \rangle_{L^2([-1,1])} = 0 \qquad n \neq 0$$

$$\langle P_n, P_n \rangle_{L^2[-1,1]} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

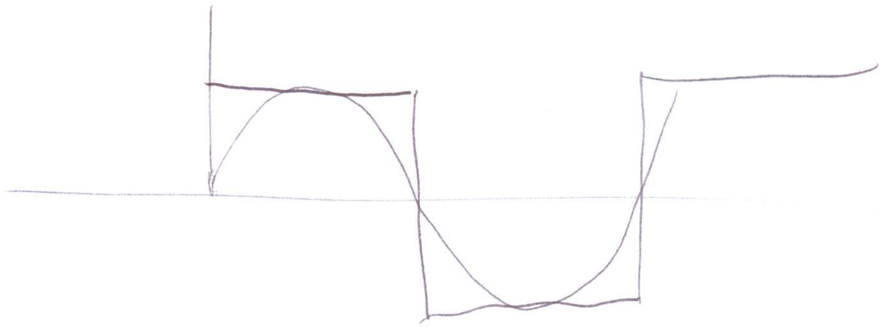
☒

$\operatorname{sig}(x \cdot y) = \operatorname{sing}(x) \cdot \operatorname{sing}(y)$.

Bsp 2

$$r_n(t) = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i2^n\pi t} - e^{-i2^n\pi t}\right)\right).$$

$$\sin(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



i) r_n ist normiert ✓

ii) $n > m$

r_m ist konstat auf $[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$ $k = 0 \dots m$.

r_n hat gleich viel negative wie positive Anteile auf dem Intervall.

$\Rightarrow \langle r_m, r_n \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle r_m, r_m \rangle = 1$

Stell $\forall r_n$, $\langle r_n, 1 \rangle = 0$ für r_n.

$\Rightarrow$ keine ~~ortho~~ orthonormal Basis. ☐

Bsp 3

$P_3 = \{ p : [0,1] \to \mathbb{R} : p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3,\ a_i \in \mathbb{R} \}$

$P_3 \subset L_2([0,1])$.

a) $\operatorname{dist}(e^t, P_3) = \inf_{g \in P_3} \| e^t - g \| \to$ Infimum wird erreicht und ist Minimum.

· $g = P_{P_3}(f)$ hat minimalen Abstand zu f.

·) Wir berechnen ONB für P_3 mit Gram Schmidt

Sei $v = \{1, t, t^2, t^3\}$ (v_0, v_1, v_2, v_3)

Gesucht ist ONB e_0, e_1, e_2, e_3.

$e_0 = \frac{w_0}{\|w_0\|}$; $w_0 = v_0$

$e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$; $w_1 = v_1 - (e_0, v_1) e_0$

$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$; $w_2 = v_2 - (e_0, v_2) e_0 - (e_1, v_2) e_1$.

$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$; $w_3 = v_3 - (e_0, v_3) e_0 - (e_1, v_3) e_1 - (e_2, v_3) e_2$

Berechnung:

$\|w_0\|^2 = \|v_0\|^2 = \int_0^1 dt = 1 \Rightarrow e_0(t) = 1$

$(e_0, v_1) = \int_0^1 1 \cdot t \, dt = \frac{1}{2} \Rightarrow w_1(t) = v_1(t) - \frac{1}{2} e_0(t) = t - \frac{1}{2}$

$\|w_1\|^2 = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{2} \Rightarrow e_1(t) = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \sqrt{12}\,(t - \frac{1}{2})$

$(e_0, u_2) = \frac{1}{2}$

$(e_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{12}}$

$w_2(t) = u_2(t) - \frac{1}{3} e_0(t) - \frac{1}{\sqrt{12}} e_1(t) = t^2 - t + 1/6$

$\|w_2\|^2 = \frac{1}{180}$

$e_2(t) = \frac{w_2}{\|w_2\|} = 6\sqrt{5}\,(t^2 - t + 1/6).$

$(e_0, u_3) = \frac{1}{4}$

$(e_1, u_3) = \frac{3\sqrt{3}}{20}$

$(e_2, u_3) = \frac{\sqrt{5}}{20}$

$w_3(t) = t^3 - 3/2\, t^2 + \frac{3}{5} t - 1/20.$

$\|w_3\|^2 = \frac{1}{2800}$

$e_3(t) = \frac{w_3}{\|w_3\|} = 20\sqrt{7}\,(t^3 - 3/2\, t^2 + 3/5\, t - 1/20).$

Überprüfe $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ ist ONB. für P_3

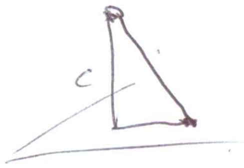
$(e_0, e^t) = e - 1$

$(e_1, e^t) = \sqrt{3}(3 - e)$

$(e_2, e^t) = 6\sqrt{5}(7e - 19)$

$(e_3, e^t) = \sqrt{7}(193 - 71e)$

$$\mathrm{Dist}(f, P_3) = \|f - p_0\|$$



$$\|f - p_0\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{3} |(e_n, f)|^2$$

und

$$\sum_{n=0}^{3} |(e_n, f)|^2 = (e-1)^2 + 3(3-e)^2 + 5(7e-19)^2 + 7(193-71e)^2$$

$$\simeq 3.19452\boxed{794}$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 (e^t)e^t = \int_0^1 e^{2t} = \frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$\simeq 3.19452\boxed{805}$$

$$\Rightarrow \mathrm{dist}(e^t, P_3) = \|f - p_0\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{n=0}^{3} |(e_n, e^t)|^2}$$

$$\simeq 0.0003$$

b) Wir haben die Darstellung in $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$

$$p_0 = \sum_{n=0}^{3} (q_n, p)\, e_n$$

Koeffvgl

$\Rightarrow$

$a_0 = 8(67e^{?} - 182)$

$a_1 = 60(286 - 103e)$

$a_2 = 20(756e - 2055)$

$a_3 = 140(193 - 71e)$.

$\square$

<u>Bemerkung:</u>

Wir könnten auch ~~??~~

$p(t)$ einsetzen und bzg a, b, c, d

minimieren aber wenn $a, b, c, d \in \mathbb{C}$?

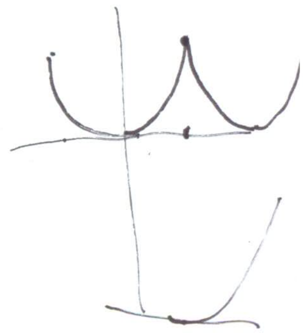
Sehr kompliziert.

Dank Hilbertraumtheorie sehr leicht.

Bsp 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (0,\pi] \\ (x-2\pi)^2 & (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$T = 2\pi$

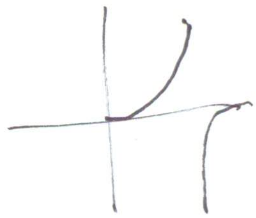


$$c_0(f) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{=k} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$= k \left[\int_0^{\pi} e^{-i0x} x^2\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ikx} (x-2\pi)^2\, dx \right]$$

$s = (x-2\pi)$

$$= K \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kx} x^2 = \cancel{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3} \pi^3$$



$=$

$$c_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x^2\, dx$$

$$\overset{PI}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik} 2x\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x\, dx \qquad \left(e^{-ik\pi} \pi^2 = e^{-ik(-\pi)} (-\pi)^2 \right)$$

$$\overset{PI}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} \left[\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik}\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2} \left[\left((-1)^k \pi - (-1)^k (-\pi) - \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-\pi}^{\pi} \right] \quad \left(e^{\pm ik\pi} = (-1)^k \right.$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \left(e^{\pm ik\pi} = (-1)^k \right).$$

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \int_0^{2\pi} (x-2\pi)^2 (x-2\pi)^2 \quad \int^{2\pi} x^2 x^2$$

$$= \frac{2}{5} \pi^5$$

i) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi^3}{3} + 2 \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

Fourierreihe konvergiert glm gegen f

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} f.$$

$\underline{x=0}$ und $e^{ik0} = 1$

$$0 = f(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3}\pi^3 + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3}\pi^3 + \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}}\, 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

ii) $\underline{\text{Parseval.}}$

$$\frac{2}{5}\pi^2 = \boxed{\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2}$$

$$= \frac{2\pi^5}{9} + \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$