# Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

Lösung Bsp 3 vom 2. Übungsblatt

Oktober 2012

1. Sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Menge im Prähilbertraum $\mathcal{H}$. Dan folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\overline{(e_n,x)}(e_n,y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\overline{(e_n,x)}||(e_n,y)| \quad \forall x,y\in\mathcal{H}.$$

Aus der Chauchy Schwartz Ungleichung folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\overline{(e_n,x)}||(e_n,y)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Weil $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Menge, gilt wegen der Bessel Ungleichung für jedes $z\in\mathcal{H}$, (wir wählen $z=x,y$),

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|z\| \ .$$

Darus folgt, daß

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\overline{(e_n,x)}(e_n,y)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(e_n,y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|\,\|y\| \ .$$

2. Zeigen sie $\overline{\text{span}(M)} \subseteq (M^T)^{\perp}$ und $(M^{\perp})^{\perp} \subseteq \overline{\text{span}(M)}$ , dann folgt die Behauptung.

   (a) $\overline{\text{span}(M)} \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$: Aus der Definition der linearen Hülle plus Skalarprodukt folgt

$$(y,\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k) = \sum a_k(y,\phi_k) = 0 \quad y\in M^{\perp}, \phi_k\in M$$

   also, $\overline{\text{span}(M)} \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$.

(b) Angenommen $\overline{\mathrm{span}(M)} \neq (M^{\perp})^{\perp}$ auf Widerspruch führen indem wir Projektionsatz anwenden und zeigen daß $\overline{\mathrm{span}(M)}^{\perp} = \emptyset$.