

Bsp 1

a) $\Rightarrow$ b)

Sei $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ konvergenz in der Norm ($\|x_n - x\| \Rightarrow 0$)

$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$ ist Norm konvergent.

a) $\Rightarrow T_n(x_{k+1} - x_k) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$

$\Rightarrow$

~~(*)~~ (*)

Definiere $h_n: C_0(X) \rightarrow Y$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto h_n(x_{k+1} - x_k) = T(x_{k+1} - x_k).$$

i)

$$\|h_n(x)\| = \|T_n(x_{k+1} - x_k)\| \leq 2 \|T_n\| \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\| = 2 \|T_n\| \|x\| \quad \forall x \in C(X)$$

$$\Rightarrow \|h_n\| \leq 2 \|T_n\|$$

ii) Sei $x_0 \in X$ das Element $(0, \dots, 0, -x, x, 0, 0, \dots) \in C_0(X)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|h_n(x_0)\| &\leq \|h_n\| \|x_0\| = \|h_n\| \|0, \dots, -x, x, 0, 0, \dots\| \\ &= 2 \|T_n(x_0)\| \leq \|h_n\| \|x_0\|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|h_n\| = 2 \|T_n\|.$$

$\Rightarrow h_n$ lin. und stetig. mit $\|h_n\| = 2 \|T_n\|$

(*) für $h_n \in C_0(X) \rightarrow Y$ ~~$x \in C_0(X)$~~

$$x \mapsto h_n(x) = T_n(x_{n+1} - x_n) \quad x \in C_0(X)$$

gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$

Weil X BR $\Rightarrow C_0(X)$ ist BR.

Prinzip
der
gleich
Beschränktheit
 $\Rightarrow \sup \|h_n\| < \infty \Rightarrow \sup \|T_n\| < \infty$

(c) $\Rightarrow$ i).

Weil $\sum x_n$ konvergiert in Norm $\stackrel{ii)}{\Rightarrow} x_n \rightarrow 0$

In der Norm $\stackrel{ii)}{\Rightarrow} T_n(x_n) \rightarrow 0$ in der Norm.

Prinzip der gleich Beschränktheit.

Bsp 2

X BR.

$$(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$$

Zeige Äquivalenz:

a) für jede absolut konvergente Reihe, in X gilt
 $(\sum_{k=1}^n x_k^*(x_k))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

b) $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ ist beschränkt in der Norm.

=

(a) $\Rightarrow$ (b)

i) Sei $I_c(X) = \{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X \mid \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \}$.
Ist X BR $\Rightarrow I_c(X)$ ist BR bzgl. $\|\cdot\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h_n : I_c(X) \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^*(x_k)$.

a) h_n ist lin. ✓

b) h_n ist stetig ✓

$$\begin{aligned} |h_n((x_k)_{k \in \mathbb{N}})| &\leq \sum_{k=1}^n \|x_k^*\| \|x_k\| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k^*\| \|x\| \quad \forall h_n \end{aligned}$$

Beh:

$$c) \|h_n\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k^*\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

$$i) |h_n((x_k)_{k \in \mathbb{N}})| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k^*\| \|x\| \quad \forall x \in I_c(X).$$

$$\Rightarrow \|h_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k^*\|$$

ii) Für jedes $1 \leq k \leq n$ und $x \in X$
 ist $(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ mal}}, x, 0, 0, \dots) \in L_k(x)$.

$$\Rightarrow \|h_n(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\| \leq \|h_n\| \|(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\|$$

$$\text{also gilt } \|x_k^*(x)\| \leq \|h_n\| \|x\| \Rightarrow \|x_k^*\| \leq \|h_n\|,$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k^*\| \leq \|h_n\|$$

$$\Rightarrow \|h_n\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k^*\|.$$

=

iii) Letztes Argument

a) gilt und $L_k(x)$ R.R. ($\forall$ Voraussetzung für glg. Beschränktheit)

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\| < \infty \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x^*\| < \infty$$

=

$$b) \Rightarrow a)$$



q.e.d.

Bsp 3

①

a) z.z.: $(C^1([0,1]), \|\cdot\|)$ mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_2$ ist BR.

b) Norm:

$(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist BR. $\Rightarrow$ ist NR.

$\Rightarrow \|\cdot\|$ ist Norm auf $C^1([0,1])$ ✓

c) Vollständigkeit

Sei $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ CF in $(C^1([0,1]), \|\cdot\|)$

$\Rightarrow (f_n)$ und (f'_n) sind CF in BR $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

$\Rightarrow \exists f, g \in (C([0,1]))$ mit $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$
 $\|f'_n - g\|_\infty \rightarrow 0$.

$\Rightarrow f'_n = g \Rightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0$

$\Rightarrow (C^1([0,1]), \|\cdot\|)$ BR.

22: $\frac{(C^1, \|\cdot\|_\infty)}{X :=}$ kein BR.

Wäre X vollständig würde gelten $\|f\|_\infty \leq \|f\|$
 $\Rightarrow$ ~~$\|f\|_\infty$~~ $\|f\|_\infty \sim \|f\|_\infty$ auf C^1

Dh:

$\exists \alpha > 0$ mit $\alpha \|f\|_\infty \geq \|f\| \quad \forall f \in C^1$

Aber, sei

$$f_n := x^n \quad \text{und} \quad f'_n = n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \quad \alpha \|f\|_\infty \geq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$\alpha \|f\|_\infty \geq \|f\|_\infty + n$$

$$\alpha \|f\|_\infty - \|f\|_\infty \geq n$$

$$(\alpha - 1) \geq n \quad \text{f.}$$

$\Rightarrow (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kann nicht vollständig sein.

Bsp 3 b)

X

Y

(2)

ist Graph kein BR

BR.

$$T: (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$$

$$f \mapsto f'$$

i) Graph abgeschlossen.

$$T \text{ ist } \underline{\overline{G(T)} \subset X \times Y}$$

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C^1[0,1]$, sd

$$f_n \rightharpoonup f, \quad T f_n = f'_n \rightharpoonup g \quad \text{mit } f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ in $(C^1, \|\cdot\|)$

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f_m\|_1 + \|f'_n - f'_m\|_1$$

Wegen a) ist $f \in (C^1, \|\cdot\|)$ mit $Tf = f' = g$

$\Rightarrow$ graphenabgeschlossen. D

~~ist~~ Aber nicht stetig wert

Sei $f_n := \frac{x^n}{n}$ $f'_n = x^{n-1}$

$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$; $\|f'_n\| = 1$.

$$\begin{aligned} T(\lim f_n) &= T(0) \\ \lim T(f_n) &= T(1) \end{aligned} \quad \not\Leftarrow$$

nicht stetig.

T ist unbeschränkt

Bem:

$\overline{T} : C^1([0,1], \|\cdot\|)$

wobei

$C^1([0,1], \|\cdot\|) \subset C^1_1(\|\cdot\|_\infty)$

ist stetig.

wend $\begin{pmatrix} C^1([0,1], \|\cdot\|) \\ C([0,1], \|\cdot\|) \end{pmatrix} \quad \text{BR}$

~~ist~~ $\implies$ Satz von abgeschloss Graphen.

Bsp 4

Natürliche Norm:

$$|c_0 \subset c_0|$$

a). Gegenbsp

Sei $X := (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht vollständig.

Sei

$$T_n : X \rightarrow X$$

$$x_m \rightarrow n x_m$$

$$n, n \in \mathbb{N}$$

Dann ist T_n :

i) linear ✓

ii) beschränkt, weil $\|T_n x\|_\infty \leq \|T_n\| \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty < \infty$

$$\text{mit } \|T_n e_n\|_\infty = n \Rightarrow \|T_n\| = n.$$

Frage

Aber $\Rightarrow (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(c_0, c_0)$ nicht gleich beschränkt.

Aber teilweise denn $x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \in c_0$

gilt

$$\|T_n x\|_\infty = \sup_{1 \leq n \leq N} n(x_n) < \infty$$

b) Nein, weil

$$T: X \rightarrow X \quad n \in \mathbb{N} \\ x_n \mapsto \left(\frac{x_n}{n} \right)$$

Dann ist T :

i) l.u.

ii) stetig, weil $\|T_x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n|}{n} \leq \sup |x_n| = \|x\|_\infty$

iii) bijektiv, denn für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{00}$

$$\text{gilt } x := (ny_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{00} \\ = T^{-1} y$$

Aber nicht offen, denn.

Behauptung: T^{-1} ist unbeschränkt.

$$y_n \rightarrow ny_n$$

Behauptung: T nicht offen:

Sonst gilt $U := T(U_1(0))$ offen in X , dh für $x=0$,
 $\in U$, $\exists r_0 > 0$ mit $U_{r_0}(0) \subset U$

Bsp 5

$$T \in \mathcal{B}(X, Y).$$

$z.z:$ i) $\exists c > 0$ mit $\|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in X$

$\Leftrightarrow$

ii) T ist $\underset{a)}{\text{injektiv}}$ und $\underset{b)}{\text{abgeschlossen}}$.

$i) \Rightarrow ii)$

a) Aus i) folgt für $x \neq 0$ gilt $\|Tx\| > 0$.

$$\Rightarrow Tx \neq 0 \Rightarrow \ker(T) = \{0\} \Rightarrow \boxed{T \text{ injektiv}}$$

b) Sei $(y_n)_n$ Folge in $\text{Bild}(T)$, die gegen $y \in Y$ konvergiert $\Rightarrow \exists (x_n) \in X$ mit $Tx_n = y_n$ und es gilt.

$$(*) \quad \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c} \|y_n - y_m\|$$

~~Wort~~ a) T stetig laut Angabe

a) weil $y_n \rightarrow y$ ist (y_n) CF $\Rightarrow (x_n)$ CF

$$\Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx = y$$

$$\Rightarrow y \in \text{Bild}(T) \Rightarrow \boxed{\text{Bild}(T) \text{ abgeschlossen}}$$

$$ii) \Rightarrow i).$$

$$1) X = \{\} \quad \checkmark$$

$$2) X \neq \{\}$$

$$\text{Sei } U := \text{Bild}(T) \subset Y.$$

1) Dann ist $T: X \rightarrow U$ stetig und bijektiv.

2) Weiters ist U abgeschlossen (wegen ii)) in Y
 $\Rightarrow U$ BR.

3) Sei $S \in \mathcal{B}(U, X)$ mit $ST = \text{Id}_X$.

$$\Rightarrow \|x\| = \|\text{Id}_X x\| = \|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \quad \forall x \in X$$

$$c := \frac{1}{\|S\|} > 0$$

ES