

Satz von Jordan von Normierung

$(V, \|\cdot\|)$ VR, dann gilt $\|\cdot\|$ $\Rightarrow \exists \langle \cdot, \cdot \rangle$ da $\|\cdot\|$ induziert

$(\Rightarrow)$ 1) Wenn das Skalarprodukt durch die Norm $\|\cdot\|$ definiert wird, dann gilt:

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

und

$$\begin{aligned} \text{ii) } \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

und

$$\text{ii) } \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

Addiere i) + ii)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \square$$

=

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{R}$: ist Polarisationsgleichung des Skalarproduktes?

i) Positiv definit: $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \vee \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{d.h., } \frac{1}{4} (\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2) = \frac{1}{4} (\|2x\|^2 - \|0\|^2) = \frac{1}{4} 4\|x\|^2 = \|x\|^2$$

ii) Symmetrie:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4} (\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \langle y, x \rangle \quad \square$$

iii) Linear im 1ste Argument

$$\mathbb{Z} \quad \langle x+z, y \rangle \stackrel{!}{=} \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle.$$

Weil laut Voraussetzung // Idempotenz gilt

$$\Rightarrow 2(\|x+y\|^2 + \|z\|^2) = \|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2$$

und

$$2(\|x-y\|^2 + \|z\|^2) = \|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2$$

Subtrahiere die 2 Glg:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\langle x, y \rangle &= 2(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ &= \|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2 - \|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} (***) \quad \langle z, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2) \end{aligned}$$

Addiere (*) u. (***)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle x+y, y \rangle + \langle z, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2) \\ &= \langle x+z, y \rangle \quad \square \end{aligned}$$

iv) Homogen

1) wegen Linearität folgt mit Induktion.

$$\langle nx, y \rangle = n \langle x, y \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) Mit Polarsatzgq $\Rightarrow \langle 0, y \rangle = 0$ und $\langle -1x, y \rangle = -1 \langle x, y \rangle$

$$\Rightarrow \langle nx, y \rangle = n \langle x, y \rangle \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$3) \text{ Sei } \lambda = \frac{n}{m} \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{N} \end{matrix} \Rightarrow m \langle \lambda x, y \rangle = \langle nm \frac{x}{m}, y \rangle = n \langle x, y \rangle$$

Weil $\|\cdot\|$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stetig und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \square$$

Angenommen wir haben ein $(\cdot, \cdot)$ so

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f})^{1/2} = \max_{0 \leq x \leq 1} |\mathbf{f}(x)| = \|\mathbf{f}\|_{\infty} \quad \forall \mathbf{f} \in C[0,1]$$

Dann muss die $\|\cdot\|$ Identität gelten (cf. Vo).

Also

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{\infty}^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\infty}^2 = 2\|\mathbf{f}\|_{\infty}^2 + 2\|\mathbf{g}\|_{\infty}^2$$

$$\text{Wähle } \left. \begin{array}{l} \mathbf{f}(x) = 1 - x \\ \mathbf{g}(x) = x \end{array} \right\} \in C[0,1]$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) &= 1 \text{ auf } [0,1] \\ \mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x) &= 1 - 2x \text{ auf } [0,1] \end{aligned}$$

Also,

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty} = 1, \|\mathbf{g}\|_{\infty} = 1, \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{\infty} = 1, \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{\infty}^2 + \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{\infty}^2 &= 2 \\ \cancel{2\|\mathbf{f}\|_{\infty}^2 + 2\|\mathbf{g}\|_{\infty}^2} &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein Skalarprodukt welches die Supnorm induziert.

b) Definiere

$$T: C[0,1] \rightarrow C[a,b]$$

$$p(x) \rightarrow (Tp)(x) = p(a + (b-a)x).$$

T ist eine Isometrie und Isomorphismus.

Beweis:

i) Isometrie

$$z.z.: \|p\|_{\infty} = \|Tp\|_{\infty}$$

ii) Isomorphismus.

z.z. T : bijektiv.

T : Homomorphismus.

1) $(\cdot, \cdot)$ ist Skalarprodukt

$l_2(I)$ hat endlich # von 0 verschiedene Terme

$\rightarrow$ genau wie für l_2

2) Vollständigkeit

a) Sei x_m mit $m \in \mathbb{N}$ Cauchyfolge
beliebig! $\leftarrow ?$ in $(l_2(I), \|\cdot\|)$.

wobei $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Nach

a) weil $x(m) \neq 0$ abzählbar viele in

$\Rightarrow \exists$ eine abzählbare Menge $I_m \subset I$ mit $x_m(i) \neq 0$

~~$x_m(i) \neq 0$~~ für $i \in I \setminus I_m$.

a) Wir setzen $\hat{I} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m \Rightarrow \hat{I}$ ist abzählbare Menge in I

$\Rightarrow \exists$ bijektive Abb $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \hat{I}$

Wir definieren $\tilde{x}_m(n) := x_m(\pi(n))$, $m \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$

$$a) \|\tilde{x}_m\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{x}_m(\pi(n))|^2$$

$$= \sum_{i \in \tilde{I}} |\tilde{x}_m(i)|^2 < \infty \quad m \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \tilde{x}_m$ ist Cauchy in ℓ_2

$\Rightarrow \tilde{x}_m$ hat GW $\tilde{x} \in \ell_2$.

a) Sei

$$x(i) := \begin{cases} \tilde{x}_m(\pi^{-1}(i)), & i \in \tilde{I} \\ 0 & i \in J \setminus \tilde{I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}_m - x\|^2 = \sum_{i \in I} |\tilde{x}_m(i) - x(i)|^2$$

$$= \sum_{i \in \tilde{I}} |\tilde{x}_m(i) - x(i)|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{x}_m(n) - \tilde{x}(n)|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

a) Weil $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ beliebig $\Rightarrow \ell_2(I)$ vollständig

□

$$(C_0, \|\cdot\|_\infty)$$

$$(l_1, \|\cdot\|_1)$$

keine Hilberträume.

C_∞ & konvergierende Folgen

C_0 enthält & gegen 0 konvergierende Folgen.

$$\|\cdot\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \quad ; \quad \|\cdot\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

Gegbebsp:

$$e_n, e_m \in C_0 \cap l_1 \quad \text{mit } n \neq m.$$

Teste, ob $\|\cdot\|$ Identität erfüllt:

$$\|e_n + e_m\|_\infty^2 + \|e_n - e_m\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2.$$

$$2(\|e_n\|_\infty^2 + \|e_m\|_\infty^2) = 2(2) = 4 \quad \times$$

Bsp 1 $\Rightarrow$ sind keine Hilbertraume.

$$(l_2, \|\cdot\|_2)$$

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 + |x_n - y_n|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2(|x_n|^2 + |y_n|^2) = 2(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) \end{aligned}$$

~~1~~

$\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\text{Bsp 1} \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2)$$

$$= \frac{1}{4} \sum |x+y|^2 - |x-y|^2$$

$$= \frac{1}{4} \sum x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2 - x_n^2 + 2x_n y_n - y_n^2$$

$$= \sum x_n y_n \quad \checkmark$$

$M(\mathbb{C})$

$$(\cdot, \cdot) : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(A, B) : M \times M \rightarrow \text{Spur}(AB^*)$$

$$A = a_{ij}$$

$$B = b_{ij}$$

$$AB = c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$A^* = \overline{a_{ji}}$$

$$B^* = \overline{b_{ji}}$$

$$\text{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

$$\text{Spur}(AB^*) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ji}}$$

i)

$$\langle A, A \rangle = \text{Spur}(AA^*) = \sum a_{ij} \overline{a_{ji}} = \sum |a_{ij}|^2 \geq 0$$

$$\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow |a_{ij}| = 0 \quad \forall i, j \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$ii) \langle \lambda A_1 + \mu A_2, B \rangle = \text{tr}((\lambda A_1 + \mu A_2) B^*)$$

$$= \text{Spur}(\lambda A_1 B^* + \mu A_2 B^*)$$

$$= \lambda \text{Spur}(A_1 B^*) + \mu A_2 (A_2 B^*)$$

$$= \lambda \langle A_1, B^* \rangle + \mu_2 \langle A_2, B^* \rangle$$

und

$$\begin{aligned} \langle B, A \rangle &= \text{Spur}(BA^*) = \sum b_{ij} \overline{a_{ji}} = \overline{\text{Spur}(AB^*)} \\ &= \overline{\langle A, B \rangle} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Skalarprodukt auf $M_n(\mathbb{C})$.

1) Vollständigkeit.

$M_n(\mathbb{C})$ kann ~~ist isom~~ ~~isom~~ ~~isom~~ mit $\mathbb{C}^{n^2}$ identifiziert werden. $\mathbb{C}^{n^2}$ ist vollständig bzgl. $\forall$ Normen.

$\Rightarrow$ Hilbertraum.

Cauchy - Bunjakowski - Schwarz Ungl.

$$|\langle A, B \rangle|^2 \leq \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle.$$

$$\rightarrow |\operatorname{Spur}(AB^*)|^2 \leq \operatorname{Spur}(AA^*) \operatorname{Spur}(BB^*) \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$$