Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

9. Übungsblatt

Januar 2013

1. Seien X normierter Raum, Y Banachraum, U ein dichter Teilraum von X und $S : U \to Y$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ mit $T_{|U} = S$, und es gilt $\|T\| = \|S\|$.
2. Zeige anhand von Hahn-Banach, dass $\ell_\infty = \ell_1^*$ gilt, aber $\ell_\infty^* \neq \ell_1$
3. Sei Z ein Teilraum eines normierten linearen Raum X und $x \in X$ hat Abstand $d = \inf\{\|z - y\| \ : \ z \in Z\}$ von Z. Zeige es existiert ein $f \in X^*$, sodass $\|f\| \leq 1$, $f(x) = d$ und $f(z) = 0$ für alle $z \in Z$.
4. Banachlimes
   (a) Berechne den Banachlimes der Folge $a, b, a, b, a, b, \dots$. Wie sieht der Banach Limes für eine allgemeine periodische Folge aus?
   (b) Sei L ein Banachlimes auf ℓ_∞. Zeigen Sie, daß es immer $x, y \in \ell_\infty$ gibt, die $L(xy) \neq L(x)L(y)$ erfüllen.
5. In der Vorlesung haben wir den Dualraum $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, als die Menge der beschränkten linearen Funktionale auf einem normierten Raum X, definiert. Weil X^* ein Banachraum ist, definieren wir den Bidualraum $(X^*)^*$. Die Abbildung $i : X \to X^{**}$ heißt kanonische Einbettung. Gilt $X \simeq X^{**}$, dann heißt X reflexiv.
   (a) Zeigen Sie, dass Hilberträume reflexiv sind. (Zeige i ist ein Isomorphismus).
   (b) Seien X und Y isomorphe Banachräume und X reflexiv. Zeige Y ist auch reflexiv.