Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

8. Übungsblatt

Dezember 2012

1. Sei $X = (C([0,1]), \|.\|_1)$ und $M = \{f \in C([a,b]) : f(0) = 0\}$ Teilraum von X. Ist die Quotientennorm eine Norm auf $X \backslash M$? Beschreiben sie den Kern der Quotientennorm. ($\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$).

2. Sei $a \leq \alpha < \beta \leq b$, $X = C([a,b])$ und $M = \{f \in C([a,b]) : f(s) = 0 \; \forall s \in [\alpha, \beta]\}$. Zeige $X \backslash M$ ist isometrisch isomorph zu $C([\alpha, \beta])$.

3. Sei H ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Teilraum von H. Zeige $Q : H \to H \backslash M$ ist ein Isomorphismus von $M^{\perp}$ nach $H \backslash M$

4. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum, M und N zwei Teilräume mit Normen $\|.\|_M$, $\|.\|_N$, sodass die Identität Abbildungen $(M, \|.\|_M) \to (M, \|\|_X)$ und $(N, \|.\|_N) \to (N, \|.\|_X)$ stetig sind. Sei $M + N = \{m + n \in X : m \in M, \; n \in N\}$ mit Norm

$$\|x\|_{M+N} \inf\{\|m\|_M + \|n\|_N \; : m \in M, n \in N, x = m + n\}.$$

   (a) Zeige $\|x\|_{M+N}$ ist Norm auf $M + N$.

   (b) Zeige, dass wenn $(M, \|.\|_M)$ und $(N, \|.\|_N)$ vollständig, dann ist $(M + N, \|.\|_{M+N})$ vollständig.

5. Sei $A : \ell_1 \to c_0^*$ mit

$$< x, Ay >:= \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \text{für } x = (x_k) \in c_0, \; y = (y_k) \in \ell_1.$$

   Zeige, A ist eine surjektive, isometrische Abbildung.