Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

7. Übungsblatt
Dezember 2012

1. Sei X ein vollständig normierter Raum.
   (a) Sei x_n eine Cauchy Folge in X. Sei weiters $x_{n(i)}$ eine Teilfoge von x_n mit $\lim_{i\to\infty} x_{n(i)} = x_\infty$. Zeige es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.
   (b) Sei x_n eine Folge in X und $x_\infty \in X$. Zeige, wenn jede Teilfoge von x_n gegen x_∞ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} = x_\infty$.
2. Zeige, dass X (normierter Raum) genau dann ein Banachraum ist, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, die $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ erfüllt, gilt, daß $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in X konvergiert.
3. Zeige, dass ℓ^∞ nicht seperabel ist, also keine abzählbare dichte Teilmenge enthält.
4. Sei $C_b([0,\infty])$ die Menge aller beschränkten, stetigen Funktionen. Sei $f \in C_b([0,\infty])$ und $a > 0$, dann definieren wir folgende Norm
$$\|f\|_a = \left(\int_0^\infty e^{-ax}|f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
   (a) Zeige $\|.\|_a$ ist eine Norm auf $C_b([0,\infty])$.
   (b) Zeige für $a > b > 0$ sind $\|.\|_a$ und $\|.\|_b$ nicht äquivalent auf $C_b([0,\infty])$.
5. Sei $1 < p < \infty$ und $k \in L^\infty([0,1]^2)$. Zeige, dass
$$(Tf)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt$$
ein stetiger Operator $T : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$ ist. (Verwende die Hölder Ungleichung).