Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

6. Übungsblatt

November 2012

1. Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(H,H)$. Zeige, dass T normal ist genau dann, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

2. Sei $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ definiert durch
$$(Af)(x) = \phi(x) \int_0^1 \phi(t) f(t) dt \ .$$
   (a) Zeige $A = A^*$ und A ist positiv.
   (b) Zeige es gibt ein $\lambda \geq 0$, sodass $A^2 = \lambda A$.
   (c) Wann ist A ein orthogonaler Projektor?

3. Sei $H = \big(\mathbb{R}^2, (.,.)\big)$ und $M = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{(x, x\tan\theta) \mid x \in \mathbb{R}\}$ mit $\theta \in (0, \pi/2)$. Finde $T_\theta \in \mathcal{B}(H,H)$ mit den Eigenschaften $T_\theta^2 = T_\theta$, $T_\theta(H) = M$ und $\mathrm{Ker}(T_\theta) = N$. Berechne $\|T_\theta\|$ und zeige, dass T_θ kein orthogonal Projektor ist.

4. Sei H Hilbertraum und P, Q zwei orthogonale Projektionen auf zwei abgeschlossene Teilräume von H.

   (a) $P + Q$ ist orthogonale Projektion genau dann, wenn $P(H) \perp Q(H)$. Ist $P + Q$ orthognale Projektion, dann gilt
$$(P+Q)(H) = P(H) + Q(H) \ ,$$
$$\mathrm{Ker}(P+Q) = \mathrm{Ker}(P) \cap \mathrm{Ker}(Q).$$

   (b) PQ ist orthogonale Projektion genau dann, wenn $PQ = QP$. Ist PQ orthogonale Projektion, dann gilt
$$(PQ)(H) = P(H) \cap Q(H) \ ,$$
$$\mathrm{Ker}(PQ) = \overline{\mathrm{Ker}(P) + +\mathrm{Ker}(Q)}.$$

5. Sei H Hilbertraum und P, Q zwei orthogonale Projektionen auf zwei abgeschlossene Teilräume von H. Folgende Aussagen sind äquivalent :

   (a) $P - Q$ ist orthogonaler Projektor.

   (b) $Q(H) \subseteq P(H)$.

   (c) $PQ = Q$.

   (d) $QP = Q$.