Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

5. Übungsblatt

November 2012

Operatoren auf Hilberträumen

1. Seien H_1 und H_2 Hilberträume. $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq H_1$ und $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq H_2$ sind Orthonormalsysteme. Weiters gilt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $U : H_1 \to H_2$ ist definiert durch

$$U(x) = \sum_1^n \lambda_i f_i (x, e_i).$$

Berechne $\|U\|$.

2. Sei H ein Hilbertraum.

   (a) $a, b \in H \setminus \{0\}$ sind zwei orthogonale Elemente. U ist ein Operator von H nach H definiert durch

$$U(x) = a \langle x, b \rangle + b \langle x, a \rangle \ .$$

   Berechne $\|U\|$.

   (b) Sei $U : L^2([0, \pi]) \to L^2([0, \pi])$ definiert durch

$$Uf(x) = \sin(x) \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt + \cos(x) \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt \ .$$

   Berechne $\|U\|$.

3. Nach einem Lemma aus der Vorlesung ist die Operatornorm eine Norm auf $\mathcal{B}(H)$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}(H)$ vollständig bezüglich dieser Norm ist. Also ist $\mathcal{B}(H)$ selbst ein Banachraum.

4. (Shiftoperator) Sei H ein reller, separabler, unendlich dimensionaler Hilbertraum und $(e_1, \ldots, e_n, \ldots)$ eine orthonormal Basis von H. Wir wollen den folgenden Operator

$$Ae_n = e_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

untersuchen.

(a) Zeige, dass $A \in \mathcal{B}(H)$ eine eindeutige Isometrie ist. Beschreibe das Bild von A und zeige, dass es abgechlossen ist in H .

(b) Bestimme $B = A^*$. Berechne $\|B\|$. Beschreibe $\mathrm{Ker}(B)$ und $\mathrm{Im}(B)$. Zeige $H = \mathrm{Ker}(B) \oplus \mathrm{Im}(A)$. Berechne $A \circ B$ und $B \circ A$.

(c) Für alle $k \geq 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Operatoren

$$A^k = A \circ \cdots \circ A \quad B^k = B \circ \cdots \circ B \quad \text{k mal} .$$

Wiederhole a) und b) für A^k und B^k.

(d) Untersuche die Konvergenz von $A^k(u)$ und $B^k(u)$ für $k \to \infty$ und $u \in H$.