Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

4. Übungsblatt
November 2012

Orthogonale Basen in Hilberträumen und Fourierreihen

1. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche-Orthonormalisierungsverfahren auf die Folge der Monome $1, x, x^2, x^3, \ldots$ im Hilbertraum $L_2([-1,1])$ an. Zeige, dass die resultierende ONB von der Form

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

ist.

2. Zeige, dass die Rademacherfunktionen

$$r_n(t) = \mathrm{sign}(\sin(2^n \pi t)),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ein Orthonormalsystem, aber keine Orthonormalbasis von $L_2([0,1])$ bilden.

3. Der Raum P_3 der Polynome vom Grad höchstens 3

$$P_3 = \{p : [0,1] \to \mathbb{R}\ :\ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, a_i \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Teilraum des Hilbertraum $L_2([0,1])$.

   (a) Berechne $\mathrm{dist}(e^t, P_3)$.

   (b) Find $\hat{p} \in P_3$, sodass $\|\hat{p} - e^t\| = \mathrm{dist}(e^t, P_3)$.

4. Wir definieren die folgende 2π periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, \pi] \\ (x - 2\pi)^2, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases} .$$

(Hinweis: Betrachte die Fourierreihe von $f(x)$).

   (a) Berechne die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} .$$

   (b) Berechne die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} .$$

5. Sei $x_0 \in H$ und M ein abgeschlossener Teilraum vom Hilbertraum H. Man beweise:

$$\min\{\|x - x_0\| \ : \ x \in M\} = \max\{|\langle x_0, y\rangle| \ : \ y \in M^{\perp}, \ \|y\| = 1\}.$$

6. (Freiwillig) Sei H ein reeller Hilbertraum. Sei $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf H für die gilt

$$\forall x, y \in H \quad |a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \text{ und } \quad \forall x \in H \; a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$$

mit $C > 0$ und $\alpha > 0$. L ist eine lineares Funktional auf H.

   (a) Zeigen sie mit Hilfe von Bsp.6 vom 3.ten Übungsblatt, dass es ein eindeutiges $u \in H$ gibt, sodass

$$\forall u \in H \quad a(u, v) = L(v).$$

   (b) Für $a(.,.)$ symmetrisch definieren wir

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} a(x,x) - L(x) \quad \forall x \in H .$$

   Zeige, dass u durch

$$\Phi(u) = \min_{x \in H} \Phi(x)$$

   charakterisiert ist.