Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

3. Übungsblatt
Oktober 2012

1. Sei H ein Hilbertraum und K eine konvexe, nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge von H. Zeige, dass die orthogonale Projektion $P_K : H \to H$ eine nichtexpansive Abbildung ist, also
$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\| \ .$$

2. Sei H ein Hilbertraum, K eine konvexe, nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge von H und $\partial K = \overline{K} \setminus \overset{\circ}{K}$
   (a) Zeige, wenn $x \notin K$, dann $P_K(x) \in \partial K$ und $d(x, K) = d(x, \partial K)$.
   (b) Weiters zeige, daß wenn $x \notin K$ und ∂K konvex und nicht-leer, dann gilt $P_K = P_{\partial K}$.

3. Sei H ein Hilbertraum und K_1, K_2 zwei konvexe, nicht leere, abgeschlossene Teilmenge von H, so daß $K_1 \subset K_2$. Zeige es gilt füer alle $x \in H$
$$\|P_{K_1}(x) - P_{K_2}(x)\|^2 \leq 2(d(x, K_1)^2 - d(x, K_2)^2).$$

4. Sei $K = \{f \in L_2[0, 1] | \int_0^1 |f(x)| dx \leq 1\} \subseteq L_2[0, 1]$.
   (a) Zeige, daß K abgeschlossen, konvex und nicht-leer ist.
   (b) Der orthogonale Projektor $P_K(g) = \hat{g}$ is definiert als
$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) - kg(x)/|g(x)|, & x \in K_t \\ 0, & x \notin K_t \end{cases}.$$
   Wobei $K_t := \{x \in [0, 1] \mid |g(x)| > t\}$, $k \geq 0$ mit $k = k\phi(k)$ und $\phi(t) = \int_{K_t} |g(x)| dx - t|K_t|$. Berechne die orthogonale Projektion $P_K(8x)$.

5. Sei H ein reeller Hilbertraum

   (a) $f : H \to \mathbb{R}$ linear und stetig auf H. Zeige, daß $\phi : H \to \mathbb{R}$, wobei $\phi(x) = \|x\|^2 - f(x)$, von unten beschränkt ist und sein Infimum in einem eindeutigen Punkt auf jeder beliebigen konvexen nicht-leeren Menge erreicht.

   (b) Sei $\phi : L_2[0,1]\mathbb{R}$ definiert als $\phi(f) = \int_0^1 |f(x)|^2 dx - 16 \int_0^1 x f(x)$ und $K = \{f \in L_2[0,1] | \int_0^1 |f(x)| dx \leq 1\}$. Finde die eindeutige Funktion $\hat{f} \in K$, so daß $\phi(\hat{f}) = \inf_{f \in K} \phi(f)$.

6. (Freiwillig) Sei H ein reeller Hilbertraum. Sei $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf H für die gilt

$$\forall x, y \in H \quad |a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \text{und} \quad \forall x \in H \; a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$$

   mit $C > 0$ und $\alpha > 0$.Zeige

   (a) Es gibt ein stetiger linearer Operator T auf H, so dass

$$\forall x, y \in H \; a(x,y) = (Tx, y) \; .$$

   (b) $T(H)$ ist dicht in H.

   (c) $\forall x \in H$ gilt $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$. Zeigen sie, daß T injektiv und $T(H)$ abgeschlossen ist.

   (d) T ist ein Isomorphismus von H auf H.