Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

2. Übungsblatt
Oktober 2012

1. Sei M ein abgeschlossener linearer Teilraum im Hilbertraum H und P_M der orthogonale Projektor auf M. Dann ist $I - P_M$ der orthogonale Projektor auf $M^\perp$.

2. Sei M ein Teilraum im Hilbertraum H.

   (a) Zeige, dass
   $$(M^\perp)^\perp = \overline{M} \, .$$
   Wobei $\overline{M}$ der Abschluss von M ist.

   (b) M ist dicht in H genau dann wenn $M^\perp = \{0\}$.

3. Sei $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ eine orthonormale Menge im Prähilbertraum $\mathcal{H}$ mit Skalarprodukt $(.,.)$. Beweise folgende Ungleichung
   $$\Big| \sum_{n=1}^\infty \overline{(e_n, x)} (e_n, y) \Big| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \, .$$

4. Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch
   $$f_n(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}} \, .$$
   Zeige die Familie $\{f_1, f_2, \dots\}$ ist orthonormal in $L_2(\mathbb{R})$. Demnach soll gelten
   $$\int_{-\infty}^\infty f_m(x) \overline{f_n(x)} dx = \begin{cases} 1, & m = n \, . \\ 0, & m \neq n \, . \end{cases}$$

5. Sei M Teilmenge vom Hilbertraum H, dann gilt
   $$(M^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}\{M\}} \, .$$