Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

11. Übungsblatt
Januar 2013

1. Sei $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ ein linearer Operator definiert durch
$$(Tf)(x) = \int_0^1 \sin(\pi(x-y))f(y)dy \; .$$
Beschreibe Kern und Bild von T.

2. Seien X, Y, Z Banachräume. Beweise folgende Aussagen
   (a) Seien $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ kompakt, dann ist jede linear Kombination von S und T kompakt.
   (b) Sei $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Operatoren in $\mathcal{B}(X, Y)$. Konvergiert $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ glewichmäßig zu T, dann ist T kompakt.
   (c) Hat $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ endlichen Rang, dann ist T kompakt.
   (d) Seien $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ Ist S beschränkt und T kompakt oder T beschränkt und S kompakt, dann ist $TS \in \mathcal{B}(X, Z)$ kompakt.

3. Konvergiert $T_n \to T$ gleichmäßig, dann gilt $\|T_n\| \to \|T\|$.

4. Sei $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ ein linearer Operator definiert durch
$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy \; ,$$
mit $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige T ist kompakt.

5. Berechnen sie die Spektralzerlegung des folgenden Integraloperator

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(s,t) f(s) ds \ ,$$

mit $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $k(s,t) = \min\{s,t\}$.

6. Zeige der Spektralradius des Volterra Operators

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds$$

ist gleich 0 auf $C([0,1])$. Berechne die Norm von T.

7. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Zeige, daß $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|^{\frac{1}{n}}$ existiert und gleich $\inf_n \|T_n\|^{\frac{1}{n}}$ ist.

8. Zeige, daß für einen beliebigen normalen Operator A gilt

$$\|A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$