Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

10. Übungsblatt
Januar 2013

1. Sei X Banachraum, Y ein normierter Raum und $T_n : X \to Y$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein linearer stetiger Operator. Zeige die Äquivalenz für
   (a) Für jede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ die in der Norm konvergiert gilt $T_n(x_n) \to 0$ in der Norm.
   (b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$

2. Sei X Banachraum und $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ eine Folge von linearen stetigen Funktionalen. Zeige die Äquivalenz für
   (a) Für jede absolut konvergente Reihe in X gilt die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^*(x_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.
   (b) Die Folge $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ ist beschränkt in der Norm.

3. (a) Zeige, dass $C^1([0,1])$ mit der Norm $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ein Banachraum ist. Ist auch $(C^1([0,1]), \|f\|_\infty)$ ein Banachraum ?
   (b) Zeige, die Abbildung
   $$T : (C^1([0,1]), \|.\|_\infty) \to (C([0,1]), \|.\|_\infty), \quad f \to f',$$
   ist graphenabgeschlossen, aber nicht stetig.

4. Kann im Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und im Satz von der offenen Abbildung auf die angegebene Vollständigkeit der betrachteten Räume verzichtet werden?

5. Sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $c > 0$, sodaß $\|Tx\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in X$, genau dann, wenn T injektiv ist und abgeschlossenes Bild in Y hat.