Übungen zu Funktionalanalysis

Nicolas Thorstensen

1. Übungsblatt
Oktober 2012

1. Ein Skalarprodukt $(.,.) : V \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V ist definiert durch die Norm $\|.\|$ auf V genau dann, wenn die Norm die Parallelogrammgleichung erfüllt ist. Und das Skalarprodukt ist gleich die Polarisationsgleichung
$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \ .$$

2. Zeige es gibt keine Skalarprodukt $(.,.)$ auf $C([0,1])$, so daß für alle $f \in C[0,1]$
$$(f,f)^{\frac{1}{2}} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$
gilt. Wie läßt sich das obige Ergebniss auf $C[a,b]$ verallgemeinern?

3. Sei I eine beliebige nicht-leere Menge und
$$\ell_2(I) = \{x : I \to \mathbb{R} \mid x(i) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } i \in I, \sum_{i \in I} |x(i)|^2 < \infty\}.$$
   (a) Zeige $(x,y) := \sum_{i \in I} x(i)y(i)$ mit $x, y \in \ell_2(I)$ ist ein Skalarprodukt auf $\ell_2(I)$.
   (b) Zeige $(\ell_2(I), (.,.))$ ist ein Hilbertraum.

4. Entscheide für jeden der folgenden Räume, ob $(c_0, \|.\|_\infty)$, $(\ell_1, \|.\|_1)$ und $(\ell_2, \|.\|_2)$ ein Hilbertraum ist. Gegebenebfalls geben sie das Skalarprodukt an.

5. Sei $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ Raum der $n \times n$ komplexen Matrizen. Ist $(\mathcal{M}(\mathbb{C}), (.,.))$ ein Hilbertraum, wobei $(.,.) : \mathcal{M}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch $(A,B) = \mathrm{Spur}(AB^*)$ definiert ist? B^* ist die adjungierte zu B. Nun zeige weiters
$$|\mathrm{Spur}(AB^*)|^2 \leq \mathrm{Spur}(AA^*)\mathrm{Spur}(BB^*).$$