Übungen zu Diskrete Optimierung

Markus Grasmair

Wien, Wintersemester 2010–2011
Blatt 2

1. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   nicht total unimodular ist, aber die Lösung der Gleichung $Ax = b$ für alle ganzzahligen Vektoren b ganzzahlig ist.

2. Zeigen Sie, dass die Familie der Wälder in einem ungerichteten Graphen einen Matroid bildet.

3. Zeigen Sie, dass das Unabhängigkeitssystem, das im Rucksackproblem auftritt, im allgemeinen kein Matroid ist. In welchen Fällen ist es dennoch einer?

4. Betrachten Sie folgendes Standortproblem (*Korte und Vygen*): Gegeben sei eine Menge von Kunden mit Nachfrage d_j, $j = 1, \ldots, n$, sowie m mögliche Standorte. Die Kosten, um den Standort i zu öffnen, betragen f_i, $i = 1, \ldots, m$, die Entfernung von Standort i zum Kunden j sei $c_{i,j}$. Weiters besitze jeder Standort nur eine begrenzte Kapazität u_i. Ziel ist es, zu entscheiden, welche Standorte geöffnet werden sollen sowie welchen Kunden man welchem Standort zuteilen soll, um einerseits die Nachfrage der Kunden abdecken zu können, andererseits die Summe der Kosten für die Eröffnungen und Entfernungen zwischen Kunden und zugeordnetem Standort zu minimieren.

   Dies läßt sich dies schreiben als das diskrete Optimierungsproblem

$$\sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_i f_i y_i \to \min$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_j d_j x_{i,j} &\leq u_i y_i && \text{für alle } i\,, \\
\sum_i x_{i,j} &= 1 && \text{für alle } j\,, \\
x_{i,j},\ y_j &\in \{0,1\} && \text{für alle } i,\ j\,,
\end{aligned}$$

wobei $y_j = 1$ falls der Standort j geöffnet werden soll und $y_j = 0$ sonst, und $x_{i,j} = 1$ falls Kunde i dem Standort j zugeteilt werden soll und $x_{i,j} = 0$ sonst.

a) Formulieren Sie eine Lagrange-Relaxierung dieses Problems auf zwei verschiedene Arten, indem Sie einerseits die Ungleichungen $\sum_j d_j x_{i,j} \leq u_i y_i$ und andererseits die Gleichungen $\sum_i x_{i,j} = 1$ relaxieren.

b) Finden Sie eine einfache Möglichkeit, das Minimierungsproblem, das bei der Relaxierung der Ungleichungen $\sum_j d_j x_{i,j} \leq u_i y_i$ auftritt, zu lösen.

c) Zeigen Sie, dass man das Minimierungsproblem, das bei der Relaxierung der Gleichungen $\sum_i x_{i,j} = 1$ auftritt, als m-faches Rucksackproblem auffassen kann.

5. Schreiben Sie ein Matlab oder Octave Programm, das in einem ungerichteten, vollständigen Graphen mit Eckenmenge $\{1,\ldots,n\}$ einen minimalen 1-Baum bezüglich einer (symmetrischen) Kostenmatrix $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ findet. Die Ausgabe des Programms soll dabei die Adjazenzmatrix A des minimalen 1-Baums sein (der Eintrag $a_{i,j}$ ist also gleich 1, wenn die Kante zwischen i und j im minimalen 1-Baum auftritt, und 0 sonst).