Übungen zu Diskrete Optimierung

Markus Grasmair

Wien, Wintersemester 2010–2011
Blatt 1

1. Formulieren Sie folgendes Problem als lineares Optimierungsproblem:

   Ein Produkt, das an den Orten A_i, $i = 1, \ldots, m$, produziert wird, soll tu den Orten B_j, $j = 1, \ldots, n$, gebracht werden. Die Kosten für den Transport einer Mengeneinheit von A_i nach B_j seien c_{ij}. Die Produktionsmenge am Ort A_i betrage $a_i \geq 0$, die Nachfragemenge am Ort B_j betrage $b_j \geq 0$. Wieviele Mengeneinheiten sollen jeweils von A_i nach B_j transportiert werden, sodass die Gesamtkosten für den Transport minimal sind, aber die gesamte Nachfrage abgedeckt wird?

2. Finden Sie ein System von linearen Ungleichungen, das das Polytop

   $$P = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1 \Big\}$$

   vollständig beschreibt.

3. Betrachten Sie den Polyeder $P = \mathcal{P}(A, b) \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie die kleinstmögliche sowie die größtmögliche Anzahl der Ecken des Polyeders P unter den Annahmen, dass P nichtleer ist und die minimalen Facetten von P tatsächlich Ecken sind.

4. Betrachten das lineare Programm

   $$x_1 + x_2 \to \max$$

   unter den Nebenbedingungen

   $$\begin{aligned} sx_1 + x_2 &\leq t\,, \\ x_1 &\geq 0\,, \\ x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

   Finden Sie Werte t, $s \in \mathbb{R}$, sodass das Problem: (a) eine optimale Lösung besitzt, (b) nach oben unbeschränkt ist, (c) keine zulässige Lösung besitzt.

5. Bringen Sie das lineare Programm

$$4x_1 - x_2 \to \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0\,, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2\,, \\ 2x_1 + x_2 &\geq -2\,, \\ x_1 - x_2 &\geq -1 \end{aligned}$$

in Standardform.

6. Implementieren Sie in Matlab oder Octave den Simplexalgorithmus zur Lösung des linearen Programmes

$$c^T x \to \min \qquad \text{unter der Nebenbedingung } Ax \leq b$$

Beachten Sie bei der Implementierung, dass für die Anwendung des Simplexalgorithmus das Problem zunächst in Standardform gebracht werden muss.