Übungen zu Diskrete Optimierung

Nicolas Thorstensen

Wien, Wintersemester 2012–2013
Blatt 2

1. Beweise Lemma 1 aus der Vorlesung
2. Beweise Lemma 2 aus der Vorlesung
3. Wir betrachten das symetrische TSP wie in der Vorlesung vorgestellt. Geben sie die Lagrange Relaxierung an.
4. Betrachten Sie folgendes Standortproblem (*Korte und Vygen*): Gegeben sei eine Menge von Kunden mit Nachfrage d_j, $j = 1, \ldots, n$, sowie m mögliche Standorte. Die Kosten, um den Standort i zu öffnen, betragen f_i, $i = 1, \ldots, m$, die Entfernung von Standort i zum Kunden j sei $c_{i,j}$. Weiters besitze jeder Standort nur eine begrenzte Kapazität u_i. Ziel ist es, zu entscheiden, welche Standorte geöffnet werden sollen sowie welchen Kunden man welchem Standort zuteilen soll, um einerseits die Nachfrage der Kunden abdecken zu können, andererseits die Summe der Kosten für die Eröffnungen und Entfernungen zwischen Kunden und zugeordnetem Standort zu minimieren.

   Dies läßt sich dies schreiben als das diskrete Optimierungsproblem

   $$\sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_i f_i y_i \to \min$$

   mit den Nebenbedingungen

   $$\begin{aligned} \sum_j d_j x_{i,j} &\leq u_i y_i && \text{für alle } i\,, \\ \sum_i x_{i,j} &= 1 && \text{für alle } j\,, \\ x_{i,j},\ y_j &\in \{0,1\} && \text{für alle } i,\ j\,, \end{aligned}$$

   wobei $y_j = 1$ falls der Standort j geöffnet werden soll und $y_j = 0$ sonst, und $x_{i,j} = 1$ falls Kunde i dem Standort j zugeteilt werden soll und $x_{i,j} = 0$ sonst.

a) Formulieren Sie eine Lagrange-Relaxierung dieses Problems auf zwei verschiedene Arten, indem Sie einerseits die Ungleichungen $\sum_j d_j x_{i,j} \leq u_i y_i$ und andererseits die Gleichungen $\sum_i x_{i,j} = 1$ relaxieren.

b) Finden Sie eine einfache Möglichkeit, das Minimierungsproblem, das bei der Relaxierung der Ungleichungen $\sum_j d_j x_{i,j} \leq u_i y_i$ auftritt, zu lösen.

5. Gegeben folgendes Optimierungsproblem

$$\max\{c^T x : \ x \ \in \ S\}.$$

Sei $S = S^1, \ldots, S^N$ ein Zerlegung von S. Ausserdem ist $z_k = \max\{c^T x : \ x \ \in \ S^k\}$ for $k = 1, \ldots, N$. Weiters ist $\overline{z}_k$ ein obere Schranke und $\underline{z}_k$ eine untere Schranke von z_k, also gilt $\underline{z}_k \leq z_k \leq \overline{z}_k$. Zeigen sie das folgende Ungleichung gilt

$$\underline{z} := \max_k \underline{z}_k \leq z_k \leq \max_k \overline{z}_k := \overline{z}$$

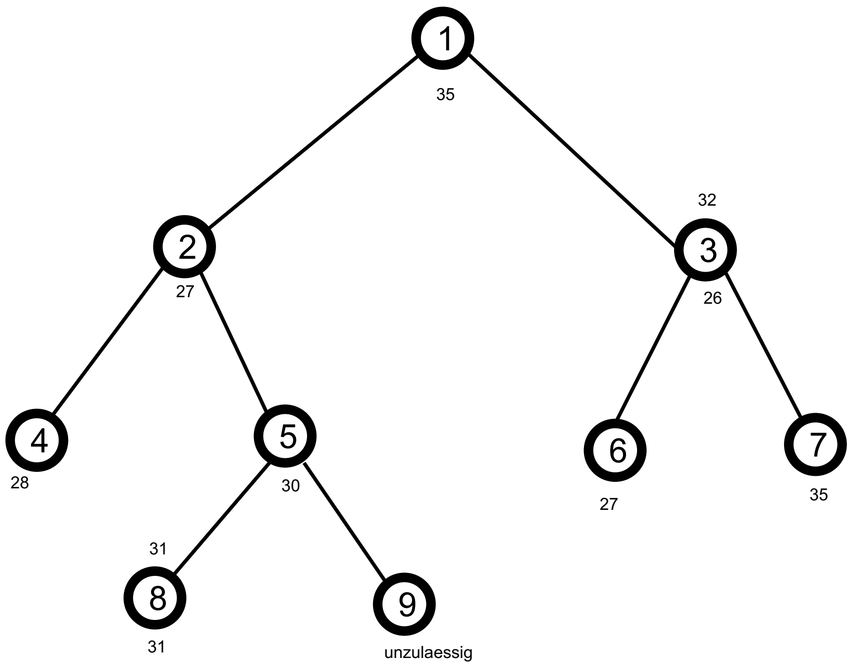

Abbildung 1: Verzweigungsbaum.

6. • Ausgehend vom Baum in Abbildung 1 geben sie die Beste untere und obere Schranke für den optimalen Wert der Zielfunktion an.
   • Welche Knoten können gestutzt werden und welche müssen erkundet werden?

7. Gegeben das folgende Rucksack Problem

$$z = \max \sum_{i}^{n} c_i x_i$$

mit den Nebenbedingungen

$$\sum_i a_i x_i < b$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Finde einen dynamische Programmierung Algorithmus für dieses Problem.

8. Lösen Sie folgendes DOP

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & -\sum_{0}^{N-1} c(1-u(t_j))y(t_j) \\ \text{NB} & y(t_j+1) = y(t_j)(0.9+0.6u(t_j)), \quad j = 0,\dots N-1 \\ & y(0) = k > 0, \\ & 0 \le u(t_j) \le 1, \quad j = 0,\dots,N-1 \end{array}$$

mit $k > 0,\ c > 0,\ b = 0.6$ und $N = 5$ anhand der in der Vorlesung vorgestellten Methode 2 mit $V(5, y_5) = 0$