Übungen zu Diskrete Optimierung

Nicolas Thorstensen

Wien, Wintersemester 2012–2013
Blatt 1

1. Finden Sie ein System von linearen Ungleichungen, das das Polytop

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1 \right\}$$

vollständig beschreibt.

2. Betrachten Sie den Polyeder $P = \mathcal{P}(A, b) \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie die kleinstmögliche sowie die größtmögliche Anzahl der Ecken des Polyeders P unter den Annahmen, dass P nichtleer ist und die minimalen Facetten von P tatsächlich Ecken sind.

3. Betrachten das lineare Programm

$$x_1 + x_2 \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} sx_1 + x_2 &\leq t\,, \\ x_1 &\geq 0\,, \\ x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Finden Sie Werte t, $s \in \mathbb{R}$, sodass das Problem: (a) eine optimale Lösung besitzt, (b) nach oben unbeschränkt ist, (c) keine zulässige Lösung besitzt.

4. Lösen Sie *händisch* mithilfe des Simplexalgorithmus das lineare Programm

$$x_1 + x_2 \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0\,, \\ x_2 &\geq 0\,, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1\,, \\ x_1 + 5x_2 &\leq 4\,. \end{aligned}$$

Starten sie mit dem Punkt $\bar{x} = (1, 0)$.

5. (Bedingung vom komplementären Schlupf) Wir haben folgendes lineares Programm gegeben:

$$2x_1 + x_2 \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0\,, \\ x_2 &\geq 0\,, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 14\,, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10\,, \\ x_1 - x_2 &\leq 3\,. \end{aligned}$$

   a) Schreiben sie das duale Programm auf.
   b) Überpruefen sie, dass $\bar{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ eine zulässige Lösung ist.
   c) Verwenden sie die Bedingung vom komplementären Schlupf, um zu zeigen, dass $\bar{x}$ optimal ist. Weiters berechnen sie die optimale Lösung des dualen Problems.

6. Sei P eine Menge beschrieben durch

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8\,, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 7\,, \\ x_i &\geq 0\,, \\ x_2 + x_5 &= 3\,. \end{aligned}$$

   a) Wieviel Basen gibt es hoechstens? Geben sie die Basen an und die dazugehörigen Punkte.
   b) Bestimmen sie alle zulässigen Basen.

7. Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ ein konvexer Polyeder mit $b \in \mathbb{R}^m$ und der Rang von A ist m. Zeigen sie folgende Äquivalenz:
   a) Jedes Element in P hat mindestens m Komponenten > 0.
   b) Jede Ecke von P hat genau m Komponenten > 0.

8. Sei P eine ein konvexer abgeschlossener Polyeder im $\mathbb{R}^2$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{8}{3}x_2 &\leq 4\,, \\ x_1 + x_2 &\leq 4\,, \\ 2x_1 &\leq 3\,, \\ x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

a) Schreiben sie P in Standardform auf. (also als Projektion eines Polyeders $\tilde{P}$ in $\mathbb{R}^5$ mit Gleichung $A\tilde{x} = \tilde{b}, \tilde{x} \geq 0$ auf $\mathbb{R}^2$)

b) Bestimmen sie alle Extremale von $\tilde{P}$. Bestimen sie anhand der Extremale von $\tilde{P}$ die Extremale von P.

9. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht total unimodular ist, aber die Lösung der Gleichung $Ax = b$ für alle ganzzahligen Vektoren b ganzzahlig ist.

10. Zeigen sie, daß das die folgenden zwei Systeme den selben Polyder beschreiben. Sind die Systeme auch total dual ganzzahlig?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11. Zeigen sie, dass der folgende Polytope

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R} : x_i \leq y \; \forall i = 1, \ldots, m, \; y \leq 1\}$$

ganzahlig ist. Verwende dafüer die totale Unimodularität.