

Übungen zu Stetige Optimierung

Markus Grasmair

1. Übungsblatt, 19. April 2012

1. Die *Rosenbrockfunktion* $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2 .$$

- Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f . Zeigen Sie weiters, dass f ein eindeutiges globales Minimum besitzt, die Funktion f aber nicht konvex ist, und bestimmen Sie die Kondition von H_f (das Verhältnis von größtem und kleinstem Eigenwert von H_f) im Minimum von f .
2. Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Zeigen Sie, dass f strikt konvex ist, das Newtonverfahren (ohne Liniensuche) aber für Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit $|x^{(0)}| \geq 1$ nicht gegen das Minimum $x^* = 0$ konvergiert.
 3. Implementieren Sie in MATLAB oder OCTAVE die in der Vorlesung besprochenen Liniensuchmethoden nach *Armijo*, *Goldstein und Price* und *Wolfe*.
 4. Implementieren Sie in MATLAB oder OCTAVE ein Gradientenabstiegsverfahren mit Liniensuche.
 5. Implementieren Sie in MATLAB oder OCTAVE das Newtonverfahren mit Liniensuche. Verwenden Sie dabei zum Lösen des Gleichungssystems $H_f(x)d = -\nabla f(x)$ einen der vordefinierten Solver.

Testen Sie Ihre Algorithmen an den Funktionen `rosenbrock.m`, `himmelblau.m` und `rosenbrockn.m`. Brechen Sie die Iteration im Gradientenverfahren und Newtonverfahren jeweils ab, sobald die Norm $\|\nabla f(x^{(k)})\|$ des Gradienten einen vorgegebenen Wert $\varepsilon > 0$ unterschritten hat. Geben Sie weiters in den Algorithmen eine Maximalanzahl der Iterationen vor.

Hinweis: Achten Sie bei der Implementierung der Liniensuche darauf, dass Sie die Ableitung der eindimensionalen Funktion, auf der Sie die Liniensuche durchführen, korrekt berechnen. Mit der Notation der Vorlesung gilt

$$g'(t) = \nabla f(x + td)^T d .$$

Prüfen Sie beim Newtonverfahren weiters, ob die erhaltene Richtung d tatsächlich eine Abstiegsrichtung ist, und verwenden Sie andernfalls die Richtung $d = -\nabla f(x)$.