Übungsblatt 9

1. Bestimmen Sie mithilfe der Potenzmethode den betragsgrößten Eigenwert und den zugehörigen Eigenvektor für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie drei Schritte der Methode mit Startvektor $x = (1,1,1)^t$.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ und zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$. Wir definieren die Matrix
$$B = (A - \lambda I)^{-1},\ \lambda \neq \lambda_i,\ i = 1, ..., n$$
   (a) Zeigen Sie, dass B die Eigenwerte
   $$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda}, ..., \frac{1}{\lambda_n - \lambda}$$
   und die gleichen Eigenvektoren wie die Matrix A besitzt.

   (b) Wir definieren die weiteren Iterationsschritte:
   Algorithmus (Inverse Iteration)
   - `Bestimme einen Startvektor` $z^{(0)}$ `mit` $||z^{(0)}||_2 = 1$
   - `for` $k = 1, 2, \cdots$
   $$\tilde{z}^{(k)} = Bz^{(k-1)},$$
   $$z^{(k)} = \frac{\tilde{z}^{(k)}}{||\tilde{z}^{(k)}||_2},$$
   $$\tilde{\lambda}^{(k)} = (z^{(k)})^t A z^{(k)}$$
   `end for`

   Zeigen Sie, dass $\tilde{\lambda}^{(k)}$ gegen den Eigenwert von A konvegiert, der am nächsten bei λ liegt. Was ist der Unterschied zwischen diesen Verfahren und der Potenzmethode?

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Eigenwerten λ_i, $i = 1, ..., n$ und zugehörigen Eigenvektoren v_i. Sei $k \in \{1, ..., n\}$ fest gewählt, so dass die Vielfachheit von λ_k eins ist und wir betrachten einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x^t v_k = 1$. Wir definieren die Matrix $B = A - \lambda_k v_k x^t$.

(a) Beweisen Sie, dass die Matrix B die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, ..., \lambda_n$ und die Eigenvektoren $w_1, ..., w_{k-1}, v_k, w_{k+1}, ..., w_n$ besitzt.

(b) Finden Sie die Eigenvektoren w_i bezüglich v_i.
Hinweis: Schreiben Sie w_i als Linearkombination von v_i und v_k.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit n reellen Eigenwerten λ_i, die $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$ erfüllen und zugehöriger orthonormaler (bzgl. $||\cdot||_2$) Eigenbasis $v_1, ..., v_n$. Schreiben Sie einen Algorithmus, der mithilfe der Potenzmethode und der speziellen Matrix B aus Aufgabe 3 alle Eigenwerte von A berechnet.
Hinweis: Finden Sie geeignete Werte für k und x in Aufgabe 3.

5. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die die Potenzmethode für die gegebene Matrix A mit Startvektor x und Toleranz *tol* ausführt.

6. Implementieren Sie in Matlab den Algorithmus aus Aufgabe 4.

—